

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΕΙΔΙΚΕΥΣΗ
ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Αλκαίος – Γεώργιος Σουγιούλ
Διπλωματική Εργασία για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
στη
Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών

*Προβλήματα κατανόησης θεμελιωδών εννοιών του Απειροστικού
Λογισμού από αποφοίτους Λυκείου*

ΑΘΗΝΑ 2001

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
στη
Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών
που απονέμει το
Τμήμα Μαθηματικών
του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

Εγκρίθηκε τηναπό Εξεταστική Επιτροπή
αποτελούμενη από τους:

Όνοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
Θεοδόσιος Ζαχαριάδης (Επιβλέπων Καθηγητής)	Αν. Καθηγητής
Στυλιανός Νεγρεπόντης	Καθηγητής
Ευστάθιος Γιαννακούλιας	Αν. Καθηγητής

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	7
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	9
ΤΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ	11
ΠΕΙΡΑΜΑ –ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ	14
ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΣΥΝΘΗΚΕΣ	14
ΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ	16
ΠΕΙΡΑΜΑ –ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ	43
ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΣΥΝΘΗΚΕΣ	43
ΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ	45
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ	55
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ	61
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	63
ΑΡΙΘΜΟΙ	64
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	66
ΣΥΝΕΧΕΙΑ	68
ΟΡΙΟ	69
ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ	70
ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	70
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	73

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διδασκαλία του απειροστικού λογισμού στο πανεπιστήμιο παρουσιάζει σημαντικές διαφορές από εκείνη στο σχολείο. Οι γνώσεις, αλλά και αντιλήψεις των πρωτοετών φοιτητών για τις θεμελιώδεις έννοιες του απειροστικού λογισμού αποτελεί αντικείμενο προς μελέτη, καθώς σε αρκετές περιπτώσεις παρουσιάζονται σημαντικά προβλήματα κατά τη μετάβαση των μαθητών από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από ένα ερωτηματολόγιο που δόθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών σε πρωτοετείς φοιτητές. Άλλο ένα ερωτηματολόγιο, περιορισμένο όμως στην έννοια του αριθμού, δόθηκε στο Τμήμα ΜΙΘΕ του Πανεπιστημίου Αθηνών, επίσης σε πρωτοετείς φοιτητές, με στόχο την ενίσχυση των αποτελεσμάτων του πρώτου. Ενδιαφέροντα συμπεράσματα προκύπτουν από την σύγκριση των απαντήσεων στα δυο Τμήματα, καθώς και από τον εντοπισμό προβλημάτων που συναντούν οι μαθητές στις έννοιες του αριθμού, της συνάρτησης, της συνέχειας, του ορίου και της παραγώγου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στη διάρκεια του δεκάτου ενάτου αιώνα γίνεται η αυστηρή θεμελίωση των πραγματικών αριθμών και κατ' επέκταση ολόκληρου του απειροστικού λογισμού. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με την πληθώρα σημαντικών θεωρητικών αποτελεσμάτων αλλά και εφαρμογών του, είχε σαν συνέπεια και την σταδιακή εισαγωγή του απειροστικού λογισμού στην εκπαίδευση, ακόμη και στη δευτεροβάθμια.

Σύμφωνα με το σύγχρονο Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα, στην τελευταία τάξη του λυκείου διδάσκονται σε εισαγωγικό επίπεδο οι έννοιες του ορίου, της συνέχειας, της παραγώγου και του ολοκληρώματος. Από τις προηγούμενες τάξεις έχει ήδη γίνει μια εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης. Οι έννοιες διδάσκονται με μεγαλύτερη έμφαση στο υπολογιστικό μέρος εις βάρος του θεωρητικού. Αυτό γίνεται εμφανές και από το είδος των θεμάτων στα οποία εξετάζονται οι μαθητές σε πανελλαδικό επίπεδο. Στην πλειονότητα, οι αποδείξεις θεωρημάτων και προτάσεων παραλείπονται, ενώ αντίθετα χρησιμοποιούνται τα αποτελέσματα τους στην επίλυση ασκήσεων.

Στην τριτοβάθμια εκπαίδευση γενικότερα, αλλά και ειδικότερα στα Τμήματα 'Μαθηματικών' και 'Μεθοδολογίας, Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης' (ΜΙΘΕ) του Πανεπιστημίου Αθηνών – στα οποία έγινε η παρούσα έρευνα – στο πρώτο έτος των σπουδών παρουσιάζονται οι ίδιες έννοιες σε μεγαλύτερο βάθος και με εστίαση στο θεωρητικό κομμάτι. Βέβαια, οι διδακτικοί στόχοι στα δυο Τμήματα, είναι πολύ διαφορετικοί. Στο Τμήμα Μαθηματικών, οι φοιτητές πρόκειται στο μέλλον να γίνουν οι ίδιοι μαθηματικοί, συνεπώς και η διδασκαλία προχωρά με στόχο τη σε βάθος κατανόηση των εννοιών, σε αντίθεση με το ΜΙΘΕ όπου οι φοιτητές απλώς χρειάζονται ένα στοιχειώδες υπόβαθρο Μαθηματικών γνώσεων για τη μετέπειτα πορεία τους.

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι πρωτοετείς φοιτητές είναι τεράστιες. Η διδασκαλία του απειροστικού λογισμού έχει αποτελέσει αντικείμενο έρευνας τα τελευταία χρόνια σε διεθνές επίπεδο, διότι παρόμοια προβλήματα στη μετάβαση του μαθητή από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση εμφανίζονται και σε άλλες χώρες. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μέρος μιας έρευνας που πραγματοποιείται στο Τμήμα Μαθηματικών του πανεπιστημίου Αθηνών. Τα τελευταία τέσσερα χρόνια ζητείται κάθε χρόνο στους νεοεισαχθέντες φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών να συμπληρώσουν κάποια ερωτηματολόγια τα οποία περιλαμβάνουν ερωτήσεις από την περιοχή του στοιχειώδους απειροστικού λογισμού. Οι έννοιες που ελέγχονται στο

ερωτηματολόγιο, είναι ο κύριος κορμός της μαθηματικής εκπαίδευσης της τελευταίας τάξης του λυκείου (στη θετική και στην τεχνολογική κατεύθυνση). Τη συμπλήρωση των ερωτηματολογίων ακολούθησαν ορισμένες προσωπικές συνεντεύξεις, οι οποίες είχαν στόχο τη διευκρίνιση διαφόρων ασαφειών στις απαντήσεις, καθώς και των εντοπισμό περισσότερων δυσκολιών που δεν ήταν εμφανείς από τις απαντήσεις στα ερωτηματολόγια. Λαμβάνοντας υπόψη, το χρονικό διάστημα που μεσολάβησε ανάμεσα στις εξετάσεις τους στο σχολείο και τη συμπλήρωση των ερωτηματολογίων, είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι πολλά από αυτά που ήξεραν όταν έδωσαν εξετάσεις, έχουν ξεχαστεί. Σαφώς όμως, κάποιο κομμάτι από την μαθηματική εκπαίδευση θα πρέπει να μπορεί να διατηρηθεί και σε βάθος χρόνου. Σε καμία περίπτωση δε θα πρέπει να θεωρηθεί ότι υπεύθυνοι για τις λανθασμένες απαντήσεις που εμφανίζονται, είναι οι φοιτητές. Η παρούσα εργασία αποτελεί μια προσπάθεια εντοπισμού δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές κατά τη μετάβασή τους από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση, στη συγκεκριμένη περιοχή του Απειροστικού Λογισμού, με απώτερο στόχο την αντιμετώπισή τους.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ πολύ τα μέλη της τριμελούς επιτροπής και ιδιαίτερος τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη, για τη βοήθεια και την υπομονή τους. Τον κ. Ελευθέριο Μαστορίδη, στον οποίο οφείλεται η διαμόρφωση του ερωτηματολογίου. Ευχαριστώ επίσης την οικογένειά μου, για την υποστήριξη και την κατανόησή (γενικότερα!).

Η εργασία αυτή είναι αφιερωμένη στην αδελφή μου Μαρία, στην οποία οφείλω και ένα μεγάλο ευχαριστώ για τη βοήθειά της στη διόρθωση των ερωτηματολογίων.

Νοέμβριος 2001,

Αλκαίος Σουγιούλ

ΤΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στο μέρος αυτό αναπτύσσονται σύντομα κάποιες απόψεις, οι οποίες αποτελούν το θεωρητικό υπόβαθρο που χρησιμοποιήθηκε στην εργασία αυτή. Επίσης, στη διδακτική των Μαθηματικών αρκετές έννοιες, που έχουν υιοθετηθεί από ξένους επιστήμονες κυρίως στην αγγλική γλώσσα, δεν έχουν ακόμη παγιωθεί σε μια κοινή ελληνική μετάφραση. Για το λόγο αυτό έχουν συμπεριληφθεί και κατάλληλες εξηγήσεις όρων που χρησιμοποιούνται στο σύνολο της εργασίας.

Η Anna Sfard στο [03] αναφερόμενη σε έννοιες των Μαθηματικών, όπως εκείνη της συνάρτησης, χρησιμοποιεί τη λέξη «entity» (οντότητα). Σε μεγάλο βαθμό και οι μαθηματικοί, περισσότερο σαν οντότητες μεταχειρίζονται τις έννοιες που μελετούν και λιγότερο σαν αφηρημένα κατασκευάσματα του νου. Μέσα από ιδιαίτερα πολύπλοκες διαδικασίες, οι μαθηματικές έννοιες λαμβάνουν υπόσταση και μετατρέπονται σε ένα συμπαγές σώμα στο μυαλό των Μαθηματικών, σε ένα αντικείμενο. Τη διαδικασία μετατροπής μιας έννοιας σε αντικείμενο (res) η Sfard την ονομάζει αντικειμενοποίηση (reification). Τι είναι όμως οι μαθηματικές έννοιες, πώς αυτές λειτουργούν και με ποια μορφή βρίσκονται στο μυαλό των Μαθηματικών αλλά και των μαθητών;

Οι Tall και Vinner στο [04] κάνουν μια διάκριση στα μαθηματικά, θεωρώντας τα είτε σαν νοητική δραστηριότητα, είτε σαν τυπικό σύστημα. Αντίστοιχα, η διάκριση αυτή μεταφέρεται και ανάμεσα στον προσωπικό τρόπο αντίληψης μιας μαθηματικής έννοιας και τον τυπικό ορισμό αυτής. Στο επίπεδο της νοητικής δραστηριότητας εμπλέκεται η έννοια της (νοητικής) αναπαράστασης μιας έννοιας. Τα μαθηματικά αντικείμενα, υποστασιοποιούνται μέσω αναπαραστάσεών τους. Τέτοιες αναπαραστάσεις είναι, για παράδειγμα στην περίπτωση της συνάρτησης:

- Η γραφική της αναπαράσταση.
- Κάποιος αλγεβρικός τύπος.
- Υποσύνολο κάποιου καρτεσιανού γινομένου, το οποίο ικανοποιεί κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες.
- Ένας πίνακας τιμών της.
- Διαγράμματα Venn.
- «Ένα μαύρο κουτί με μια είσοδο και μια έξοδο». Από την είσοδο μπαίνουν τα στοιχεία του πεδίου ορισμού και από την έξοδο βγαίνουν τα αντίστοιχά τους στοιχεία του συνόλου τιμών.

Κάθε μαθηματικός έχει τέτοιου τύπου αναπαραστάσεις στο μυαλό του όταν καλείται να χειριστεί την έννοια της συνάρτησης. Παρόμοιες αναπαραστάσεις υπάρχουν για όλες τις μαθηματικές έννοιες. Αυτές οι αναπαραστάσεις βρίσκονται σε μια αρμονική συνύπαρξη. Μαζί με τις νοητικές αναπαραστάσεις μιας έννοιας, υπάρχει και ένα σύνολο με ιδιότητες και διαδικασίες που σχετίζονται με την έννοια. Για παράδειγμα, στην έννοια της συνάρτησης:

- Οι ιδιότητες ένα προς ένα και επί
- Η άλγεβρα των συναρτήσεων (πράξεις, σύνθεση)
- Πότε δυο συναρτήσεις είναι ίσες.

Το σύνολο όλων αυτών των αναπαραστάσεων, των ιδιοτήτων και διαδικασιών που συνδέονται με μια έννοια αποτελούν αυτό που οι Vinner και Hershkowitz (στο Vinner & Hershkowitz R. 1980: 'Concept images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts', Proceedings of the forth international conference of PME, Berkley, 177-184) ονομάζουν εννοιοεικόνα (concept image). Η εννοιοεικόνα ποικίλλει από άνθρωπο σε άνθρωπο και εξαρτάται σαφώς από τη μαθηματική του εμπειρία. Όταν καλείται ο μαθηματικός να χειριστεί μια μαθηματική έννοια, ανακαλεί-ενεργοποιεί εκείνο το κομμάτι της εννοιοεικόνας για τη συγκεκριμένη έννοια, το οποίο είναι κατάλληλο για την περίπτωση.

Μια αντίστοιχη συμπεριφορά είναι επιθυμητή και στο μαθητή. Ένας από τους στόχους του δασκάλου επικεντρώνεται στην ανάπτυξη περιβάλλοντος κατάλληλου ώστε να δίνεται στο μαθητή η ευκαιρία να δημιουργήσει τέτοιες νοητικές αναπαραστάσεις και να τις συνδέσει μεταξύ τους με τέτοιο τρόπο ώστε να συνδεθούν σε μια ολότητα. Εκεί βρίσκεται και η πολυπλοκότητα των Μαθηματικών αντικειμένων. Η πληθώρα αναπαραστάσεων μιας έννοιας και η συνεχής ανάγκη εναλλαγής μεταξύ τους είναι από τα πιο δύσκολα μέρη της μαθηματικής σκέψης.

Στις έννοιες, ειδικότερα, του απειροστικού λογισμού, η ύπαρξη πολλαπλών αναπαραστάσεων αποτελεί αναγκαιότητα κατά τη διδακτική πράξη. Το [6] είναι ένα βιβλίο απειροστικού λογισμού. Αξιοσημείωτο είναι ότι από τον πρόλογό του θέτει σαν μια από τις βασικές αρχές ότι «κάθε θέμα θα πρέπει να παρουσιάζεται γεωμετρικά, αριθμητικά, αλγεβρικά και λεκτικά». Ένα επιχείρημα προς αυτή την κατεύθυνση πηγάζει από την ίδια την ιστορική εξέλιξη του απειροστικού λογισμού. Ως γνωστόν ο διαφορικός και ο ολοκληρωτικός λογισμός εμφανίστηκαν και χρησιμοποιήθηκαν πολλούς αιώνες πριν τυποποιηθούν. Η χρήση

αυτή στηρίχθηκε, μέσω της διαίσθησης, στην κατάλληλη δημιουργία εννοιοεικόνων. Από τις εννοιοεικόνες αυτές, ασφαλώς έλλειπε παντελώς ο τυπικός ορισμός των εννοιών. Η τυποποίηση τους δίνει, βέβαια, ένα στέρεο έδαφος για την επιστημονική τους ισχύ, σπάνια όμως αποτελεί το εργαλείο για την ανακάλυψη νέων ιδεών.

ΠΕΙΡΑΜΑ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΣΥΝΘΗΚΕΣ

- Τα ερωτηματολόγια δόθηκαν σε ένα δείγμα 54 πρωτοετών φοιτητών του Τμήματος Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Αθηνών.
- Η εξέταση πραγματοποιήθηκε την Παρασκευή 20 Οκτωβρίου 2000 και αφότου οι φοιτητές / φοιτήτριες είχαν παρακολουθήσει έξι δίωρα εισαγωγικά μαθήματα Απειροστικού Λογισμού.
- Η εξέταση είχε διάρκεια μία ώρα και τρία τέταρτα και πραγματοποιήθηκε στην ώρα του μαθήματος του Απειροστικού Λογισμού.
- Οι φοιτητές / φοιτήτριες δεν είχαν ενημερωθεί για την εξέταση.
- Κάθε φοιτητής εργάστηκε μόνος του. Δεν υπήρχε καμία συνεργασία μεταξύ τους.
- Όλοι οι φοιτητές / φοιτήτριες εξετάστηκαν στα Μαθηματικά τον Ιούνιο του 2000, είτε με πανελλαδικές εξετάσεις (Μαθηματικά Α΄ Δέσμης) είτε με γενικές εξετάσεις (Μαθηματικά Θετικής ή Τεχνολογικής Κατεύθυνσης)

Η κατανομή των φοιτητών σύμφωνα με το εκπαιδευτικό σύστημα που ακολούθησαν στο σχολείο είναι όπως παρακάτω.

1	Θετική Κατεύθυνση	35	64,8%
2	Τεχνολογική Κατεύθυνση	10	18,5%
3	Πρώτη Δέσμη	9	16,7%

- Ο μέσος όρος των βαθμών απολυτηρίου λυκείου των φοιτητών είναι 17,75
- Ο μέσος όρος των βαθμών των φοιτητών στα μαθηματικά κατά τις εξετάσεις του Ιουνίου (είτε της κατεύθυνσης, είτε της δέσμης), είναι 16,75

Δύο φοιτητές δε συμπλήρωσαν το βαθμό απολυτηρίου λυκείου και δύο άλλοι δε συμπλήρωσαν το βαθμό τους στα μαθηματικά. Γι' αυτούς δεν έγινε καμία υπόθεση. Απλώς δεν ελήφθησαν στους υπολογισμούς των μέσων όρων.

Μια καλύτερη εικόνα για το επίπεδο των μαθητών παίρνουμε από τα αντίστοιχα θηκογράμματα. Υπενθυμίζουμε ότι το θηκόγραμμα παρέχει τις εξής πληροφορίες¹:

Το ορθογώνιο περιέχει το 50% των παρατηρήσεων.

Η αριστερή βάση του ορθογωνίου αντιστοιχεί στο πρώτο τεταρτημόριο, δηλαδή αριστερά του βρίσκεται το πρώτο 25% των παρατηρήσεων.

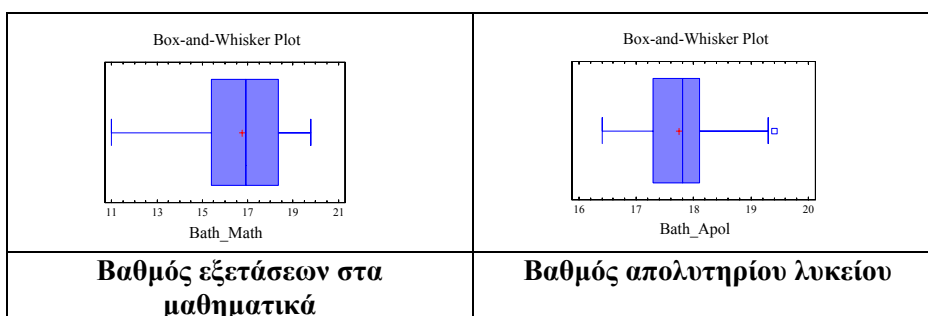
Η δεξιά βάση του ορθογωνίου αντιστοιχεί στο τρίτο τεταρτημόριο, δηλαδή δεξιά του βρίσκεται το τελευταίο 25% των παρατηρήσεων.

Η κάθετη γραμμή μέσα στο ορθογώνιο αντιστοιχεί στη διάμεσο του δείγματος δηλαδή αριστερά της βρίσκεται το 50% των παρατηρήσεων.

Οι γραμμές αριστερά και δεξιά του ορθογωνίου εκτείνονται το πολύ έως το τριπλάσιο του ημιενδοτεταρτημοριακού εύρους (δηλαδή μέχρι την τελευταία παρατήρηση που δεν απέχει από το αντίστοιχο τεταρτημόριο περισσότερο από το τριπλάσιο της ημιδιαφοράς του τρίτου από το πρώτο τεταρτημόριο).

Τυχόν ακραίες τιμές σημειώνονται με ένα μικρό τετράγωνο – όπως στο βαθμό του απολυτηρίου λυκείου.

Ο μέσος όρος του δείγματος σημειώνεται με ένα σταυρό.



Τρεις εβδομάδες αφότου οι φοιτητές / φοιτήτριες απάντησαν στα ερωτηματολόγια, κλήθηκαν κάποιοι από αυτούς να δώσουν προσωπική συνέντευξη. Η συνέντευξη είχε στόχο να διασαφηνιστούν κάποιες ασάφειες ενδεχομένως στις απαντήσεις ή να γίνει κατανοητός ο τρόπος με τον οποίο κατέληξαν τα παιδιά σε κάποιες συγκεκριμένες απαντήσεις. Η επιλογή των παιδιών για τη συνέντευξη έγινε βάσει των απαντήσεων που είχαμε λάβει. Η υποβολή στη διαδικασία αυτή ήταν προαιρετική. Από τα παιδιά ζητήθηκε να μας επιτρέψουν τη μαγνητοφώνηση της συζήτησης. Συνολικά έγινε συζήτηση με έξι παιδιά.

¹ Αναλυτικά βλ. βιβλιογραφία: [5]

ΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Παρακάτω δίνονται μία προς μία οι ερωτήσεις που τέθηκαν στους φοιτητές / φοιτήτριες, με τη σειρά και τις εκφωνήσεις που τους δόθηκαν. Ακολουθεί για κάθε ερώτηση (ή ομάδα ερωτήσεων όπου κρίνεται σκόπιμο) το πλήθος αλλά και το επί τοις εκατό ποσοστό των παιδιών που απάντησαν σωστά – λάθος ή δε γνώριζαν την απάντηση.

E1. Γράψτε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $A = \{1, 2, \{3, 4\}, 5\}$.

Σωστό	37	69%
Λάθος	12	22%
Δε γνωρίζω	5	9%

E2. Γράψτε ένα φυσικό αριθμό.

Απάντησαν όλοι σωστά

E3. Γράψτε έναν ακέραιο αριθμό που δεν είναι φυσικός.

Δύο παιδιά (9%) απάντησαν λανθασμένα.

- Οι λανθασμένες απαντήσεις ήταν το μηδέν και το 12. Το μηδέν είναι αλήθεια ότι πολλές φορές (ξεκινώντας μάλιστα από τους αρχαίους χρόνους) δε θεωρείται φυσικός αριθμός, για διάφορους λόγους, ενώ σε κάθε περίπτωση είναι ακέραιος (ως ουδέτερο της προσθετικής ομάδας). Παρόλα αυτά στο σχολείο το μηδέν το θεωρούν φυσικό αριθμό ενώ ασφαλώς δεν αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα ακεραίου που δεν είναι φυσικός.

E4. Γράψτε ένα ρητό αριθμό που δεν είναι ακέραιος.

Όλοι απαντούν σωστά

E5. Γράψτε ένα πραγματικό αριθμό που δεν είναι ρητός.

7 (13%) απαντούν λανθασμένα και 1 (2%) δεν απαντά.

- Ενδεικτικά κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις είναι οι εξής:
«δεν υπάρχει πραγματικός που δεν είναι ρητός, κάθε αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή ρητού πχ $0 = 0/1$ ».
Επίσης: $2/3$, 0.062 , 7 , 4
- Από τις συνεντεύξεις προέκυψε και μια εσφαλμένη (που όμως συχνά απαντάται) εντύπωση σχετική με το ποιοι αριθμοί είναι ρητοί και ποιοι άρρητοί. Σημειωτέον δε το γεγονός ότι πρόκειται για φοιτητή με ιδιαίτερες ικανότητες. Αυτός υποστήριζε ότι ρητοί λέγονται οι αριθμοί που στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα έχουν πεπερασμένο δεκαδικό μέρος, Αυτό βέβαια δικαιολογεί την απάντησή $2/3$ που έδωσε στην E5.

9 παιδιά (17%) δεν απαντούν σωστά σε κάποια από τις E2 – E5!

E6. Να συγκρίνετε τα ζεύγη των επομένων αριθμών συμπληρώνοντας κατάλληλα στο κενό κάποιο από τα σύμβολα $<$, $=$, $>$.

	Για το ζεύγος:		Σωστό	Λάθος	Δε γνωρίζω
1	-600^{37}	-600^{86}	34 (63%)	20 (37%)	0
2	$0,999\dots$	$0,999$	44 (81%)	9 (17%)	1 (2%)
3	$1,888\dots$	$1,9$	53 (98%)	1 (2%)	0
4	$0,4^5$	$0,4^7$	33 (61%)	19 (35%)	2 (4%)
5	$-0,3^{31}$	$-0,3^{56}$	38 (70%)	16 (30%)	0
6	$2,999\dots$	3	3 (6%)	51 (94%)	0

- Κανένας φοιτητής δεν απαντά σε όλα τα υποερωτήματα της E6 σωστά.

- Σε όλα εκτός από το 6^ο ερώτημα, το οποίο αποτελεί ιδιάζον ερώτημα, απαντούν σωστά 12 φοιτητές / φοιτήτριες δηλαδή ποσοστό 22%.
- Μόνο 16 φοιτητές / φοιτήτριες δηλαδή το 30% απαντούν σωστά και στις τρεις ερωτήσεις που αφορούν στις εκθετικές συναρτήσεις.

E7. Δίνονται τα επόμενα ζεύγη αριθμών. Εάν υπάρχει κάποιος αριθμός μεταξύ των αριθμών του ζεύγους σημειώστε τον στο κενό. Εάν δεν υπάρχει, γράψτε στο κενό: “Δεν υπάρχει”.

	Για το ζεύγος		Σωστό	Λάθος	Δε γνωρίζω
1	0,1	0,11	42 (78%)	12 (22%)	0
2	0,777...	0,7778	44 (81%)	9 (17%)	1 (2%)
3	2,999...	3	49 (91%)	3 (6%)	2 (4%)
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	46 (85%)	5 (9%)	3 (6%)

- 31 φοιτητές / φοιτήτριες (57%) απαντούν σε όλα τα υποερωτήματα της E7 σωστά.

E8. Υπάρχει ρητός που είναι μεγαλύτερος του $\frac{3}{5}$ και τέτοιος, ώστε να μην υπάρχει κανένας άλλος αριθμός ανάμεσα σ’ αυτόν και τον $\frac{3}{5}$; Αν ναι, τότε γράψτε ποιος είναι. Αν δεν υπάρχει, γράψτε: “Δεν υπάρχει”

Σωστό	42	78%
Λάθος	7	13%
Δε γνωρίζω	5	9%

E9. Μπορείτε να βρείτε δύο πραγματικούς αριθμούς τέτοιους, ώστε μεταξύ τους να μην υπάρχει κανένας άλλος πραγματικός αριθμός; Αν ναι, τότε γράψτε τους. Αν όχι, γράψτε: “Δεν υπάρχουν”

Σωστό	32	59%
--------------	----	-----

Λάθος	22	41%
Δε γνωρίζω	0	0%

- Οι 26 από τους 54 φοιτητές / φοιτήτριες (δηλαδή σε ποσοστό 48%) πέφτουν σε λογική αντίφαση μέσω των απαντήσεών τους ως εξής:
 - Στην Ε6.6 απαντούν $2,999... < 3$ (οπότε ο 2,999... και ο 3 είναι διαφορετικοί μεταξύ τους αριθμοί)
 - Στην Ε7.3 απαντούν ότι ανάμεσά τους δεν υπάρχει κανένας πραγματικός αριθμός

Στην Ε9 απαντούν σωστά, ισχυριζόμενοι ότι τέτοιο ζεύγος αριθμών δεν υπάρχει

E10.		Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω
1	Ο $\sqrt{2}$ είναι πραγματικός αριθμός.	50 (93%)	4 (7,41)	0
2	Ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός αριθμός.	51 (94%)	3 (6%)	0
3	Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός.	51 (94%)	2 (4%)	1 (2%)
4	Ο $\sqrt{2}$ γράφεται σε δεκαδική μορφή με άπειρα δεκαδικά ψηφία.	47 (87%)	7 (13%)	0
5	Ο $\sqrt{2}$ γράφεται σε δεκαδική μορφή με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία.	45 (83%)	8 (15%)	1 (2%)
6	Ο $\sqrt{2}$ δε γράφεται σε δεκαδική μορφή.	50 (93%)	4 (7%)	0

- Σε ολόκληρη την Ε10 απαντούν σωστά 39 φοιτητές / φοιτήτριες δηλαδή το 72% του δείγματος.

- Ένας φοιτητής υποστηρίζει ότι:
 - ο $\sqrt{2}$ δεν είναι πραγματικός αριθμός
 - είναι ρητός και
 - είναι άρρητος

(δυστυχώς αυτός ο φοιτητής παρόλο που κλήθηκε, δεν ήρθε για συνέντευξη).

E11.		Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω
------	--	-------	-------	----------

1	Ο 3,46 είναι πραγματικός αριθμός.	54 (100%)	0	0
2	Ο 3,46 είναι ρητός αριθμός.	46 (85%)	8 (15%)	0
3	Ο 3,46 είναι άρρητος αριθμός.	46 (85%)	8 (15%)	0

- Στην 11 (παρόλο που δεν είναι εμφανές στην ανάλυση) υπάρχουν δυο φοιτητές / φοιτήτριες από τους οποίους ο ένας θεωρεί το 3,46 ταυτόχρονα και ρητό και άρρητο ενώ ο άλλος ούτε ρητό ούτε άρρητο.
- Συνολικά δηλαδή 9 (17%) φοιτητές / φοιτήτριες απαντούν λάθος σε τουλάχιστον μια από τις E11

E12.		Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω
1	Ο 0,78634... είναι πραγματικός αριθμός.	53 (98%)	1 (2%)	0
2	Ο 0,78634... είναι ρητός αριθμός.	41 (76%)	13 (24%)	0
3	Ο 0,78634... είναι άρρητος αριθμός.	39 (72%)	15 (28%)	0

- Σε ολόκληρη την E12 απαντούν σωστά 38 φοιτητές / φοιτήτριες δηλαδή το 70% του δείγματος.

E13.		Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω
1	Ο 0,7777... είναι πραγματικός αριθμός.	52 (96%)	2 (4%)	0
2	Ο 0,7777... είναι ρητός αριθμός.	23 (43%)	31 (57%)	0
3	Ο 0,7777... είναι άρρητος αριθμός.	23 (43%)	31 (57%)	0

- Σε ολόκληρη την E13 απαντούν σωστά 20 φοιτητές / φοιτήτριες δηλαδή το 37% του δείγματος.

E14.		Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω

1	$\frac{2}{3}$ είναι πραγματικός αριθμός.	51 (94%)	1 (2%)	2 (4%)
2	$\frac{2}{3}$ είναι ρητός αριθμός.	46 (85%)	7 (13%)	1 (2%)
3	$\frac{2}{3}$ είναι άρρητος αριθμός.	46 (85%)	6 (11%)	2 (4%)
4	$\frac{2}{3}$ γράφεται σε δεκαδική μορφή με άπειρα δεκαδικά ψηφία.	49 (91%)	4 (7%)	1 (2%)
5	$\frac{2}{3}$ γράφεται σε δεκαδική μορφή με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία.	48 (89%)	5 (9%)	1 (2%)
6	$\frac{2}{3}$ δε γράφεται σε δεκαδική μορφή.	53 (98%)	1 (2%)	0

- Σε ολόκληρη την E14 απαντούν σωστά 37 φοιτητές / φοιτήτριες δηλαδή το 69% του δείγματος.

E15.		Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω
1	Κάθε πραγματικός αριθμός γράφεται με δεκαδική μορφή.	38 (70%)	15 (28%)	1 (2%)
2	Κάθε αριθμός που γράφεται με δεκαδική μορφή είναι πραγματικός	36 (67%)	16 (30%)	2 (4%)

- Σε ολόκληρη την E15 απαντούν σωστά 24 φοιτητές / φοιτήτριες δηλαδή το 44% του δείγματος.
- Στην ομάδα των E10 – E14 απαντούν σε όλες σωστά μόνο 6 φοιτητές / φοιτήτριες (11%)
- Ενώ στην ομάδα των E10 – E15 απαντούν σωστά μόνο 3 φοιτητές / φοιτήτριες (6%)

Κανένας φοιτητής δεν απάντησε σωστά σε όλες τις ερωτήσεις E1 – E15 (ακόμη και εξαιρουμένων εκείνων που σχετίζονται με τα 2,999... και 3).

E16. Οι προσερχόμενοι σε κάποιο Γυμναστήριο αφήνουν για λόγους ασφαλείας τα χρήματά τους στον υπεύθυνο. Υπάρχει συνάρτηση ανάμεσα στα ονοματεπώνυμα των μελών και τα χρήματά τους; Δικαιολογείστε την απάντησή σας. (Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν μέλη με το ίδιο ονοματεπώνυμο.)

Σωστό	19	35%
Λάθος	23	43%
Δε γνωρίζω	12	22%

- Στην ερώτηση αυτή οι απαντήσεις των φοιτητών ποικίλουν. Μια βασική παρατήρηση που προκύπτει από τη διόρθωση αυτής της ερώτησης είναι η αδυναμία αρκετών φοιτητών να εκφραστούν στη γλώσσα μας. Από τις απαντήσεις τους φαίνεται ότι γνωρίζουν ακριβώς για ποιον λόγο μπορούμε να ορίσουμε μια τέτοια συνάρτηση, δε μπορούν όμως να εκφράσουν τα επιχειρήματά τους.
- Σνήθης λανθασμένη απάντηση είναι η εξής: δεν μπορούμε να ορίσουμε τέτοια συνάρτηση διότι δεν υπάρχει αλγεβρικός τύπος για μια τέτοια συνάρτηση.
- Ένα ιδιαίτερα σνήθης επίσης λάθος είναι η σύγχυση του μονοσήμαντου της εικόνας με την ιδιότητα $1 - 1$.
(δεν είναι συνάρτηση διότι κάποιος μπορεί να έχουν το ίδιο ποσό χρημάτων).
Στο ίδιο επιχειρήμα καταφεύγουν και κάποιοι φοιτητές / φοιτήτριες που θεωρούν απαραίτητα το σύνολο των χρημάτων ως πεδίο ορισμού.
- Κάποιος φοιτητής υποστηρίζει ότι δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση διότι εάν υπήρχε, θα έπρεπε σε κάθε ονοματεπώνυμο να αντιστοιχίζεται κάποιο ποσό χρημάτων. Κάτι τέτοιο όμως δε συμβαίνει διότι κάποιος μπορεί να μην έχει χρήματα (άρα ούτε και εικόνα σε κάποιο στοιχείο του πεδίου ορισμού). Ασφαλώς θα μπορούσαμε να προσάψουμε το μηδέν για εικόνα σε ονοματεπώνυμο δίχως χρήματα. Αυτή η απάντηση αρχικά δείχνει ότι ο φοιτητής γνώριζε ότι σε μια συνάρτηση κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού έχει μία εικόνα μέσω αυτής. Από την άλλη φανερώνει και ένα γνωστό επιστημολογικό εμπόδιο.
Η θεώρηση του μηδενός ως αριθμού, είτε ως έλλειψη αριθμού. Είναι γνωστό ότι κατά την ανάπτυξη ιστορικά της έννοιας του αριθμού, το

μηδέν εισήχθη ως αριθμός πολύ αργότερα από τους φυσικούς αριθμούς. Ένας από τους βασικούς λόγους που συνέβη αυτό είναι και η άρνηση του ανθρώπου να θεωρήσει ομογενή (εξίσου αριθμούς) ένα πλήθος από μονάδες και ένα μη πλήθος από μονάδες.

E17. α) Οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ και $g(x) = x + 2$ είναι ίσες ; (Δικαιολογείστε την απάντησή σας.)

Σωστό	45	83%
Λάθος	9	17%

β) Είναι γνωστό ότι: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$. Από

ποια ιδιότητα των ορίων προκύπτει η ισότητα $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)$;

(Δικαιολογείστε την απάντησή σας.)

Σωστό	1	2%
Λάθος	35	65%
Δε γνωρίζω	18	33%

Στην ερώτηση αυτή απαντάει σωστά μονάχα μια φοιτήτρια, η οποία έχει γενικότερα καλή εικόνα στο ερωτηματολόγιο.

Η απάντηση που δίνει είναι η εξής:

«Οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες αφού δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού όμως όταν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0}$ μιας συνάρτησης δε μας ενδιαφέρει αν

το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης άρα για τον υπολογισμό ορίων οι συναρτήσεις f και g είναι ισοδύναμες».

E18. Εξετάστε αν οι παρακάτω σχέσεις μπορούν να ορίσουν συναρτήσεις. Δικαιολογείστε τις αρνητικές σας απαντήσεις. Σε όσες νομίζετε ότι ορίζουν συνάρτηση δώστε κατάλληλο πεδίο ορισμού, για το σύμβολο που θα θεωρήσετε ως ανεξάρτητη μεταβλητή. Αν υπάρχουν σταθερές συναρτήσεις, σημειώστε τις με [c].

1. $y = x^2$

Σωστό	49	91%
Λάθος	5	9%

2. $f(x) = 3$

Σωστό	51	94%
Λάθος	3	6%

3. $x^2 + y^2 = 3$

Σωστό	37	69%
Λάθος	15	28%
Δε γνωρίζω	2	4%

4. $y = \int_0^1 \sqrt{x^2 + x + 1} \, dx$

Σωστό	5	9%
Λάθος	5	9%
Δε γνωρίζω	44	81%

- Στην ερώτηση αυτή δοκιμάζουν να απαντήσουν μονάχα δέκα παιδιά (κυρίως παιδιά που αποφοίτησαν από το σχολείο πριν από το 2000). Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι τη σχολική χρονιά 1999 – 2000, η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος ήταν εκτός της ύλης των εξετάσεων της τρίτης λυκείου.

5. $s = 3t$

Σωστό	41	76%
Λάθος	13	24%

6. $\alpha^2 - \beta = 0$

Σωστό	35	65%
-------	----	-----

Λάθος	14	26%
Δε γνωρίζω	5	9%

7. $x^4 = 3y$

Σωστό	36	67%
Λάθος	12	22%
Δε γνωρίζω	6	11%

8. $\alpha = \sqrt{2}$

Σωστό	44	81%
Λάθος	7	13%
Δε γνωρίζω	3	6%

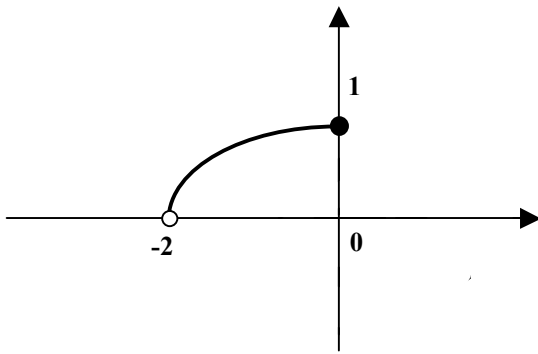
9. $f(y) = e^y$

Σωστό	36	67%
Λάθος	15	28%
Δε γνωρίζω	3	6%

- Σε όλα τα ερωτήματα της E18 (εκτός από το E18.4) απαντούν σωστά 12 φοιτητές / φοιτήτριες (22%)

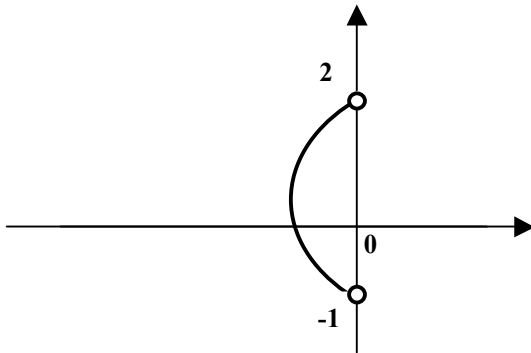
Ε19.α) Σημειώστε με **[Σ]** τα γραφήματα των καμπυλών που έχουν προκύψει από συναρτήσεις της μορφής $y = f(x)$ και με **[Ο]** εκείνα που είναι αδύνατον να προκύψουν από συναρτήσεις της μορφής $y = f(x)$.
 (Τα x βρίσκονται στον οριζόντιο άξονα για όλα τα γραφήματα.)

* **β)** Σημειώστε με **[σ]** τα γραφήματα των καμπυλών που είναι συνεχείς συναρτήσεις. Στις μη συνεχείς καταγράψτε τα σημεία ασυνέχειας.

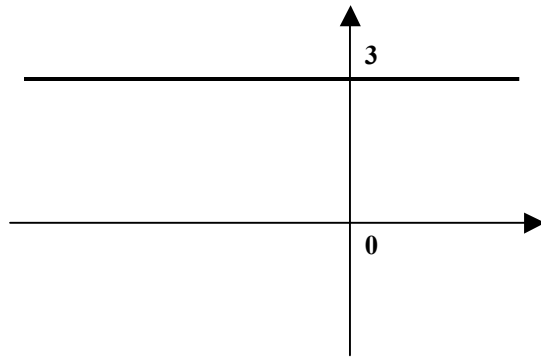


α		
Σωστό	49	91%
Λάθος	4	7%
Δε γνωρίζω	1	2%

β		
Σωστό	24	44%
Λάθος	21	39%
Δε γνωρίζω	9	17%

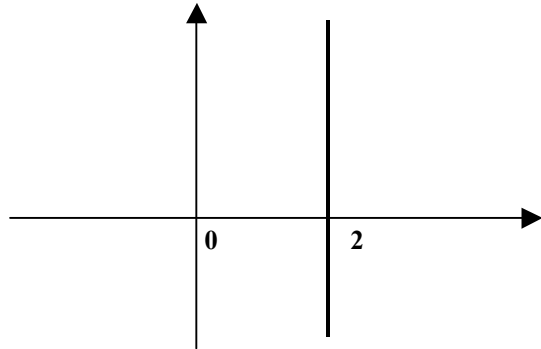


α		
Σωστό	50	93%
Λάθος	4	7%

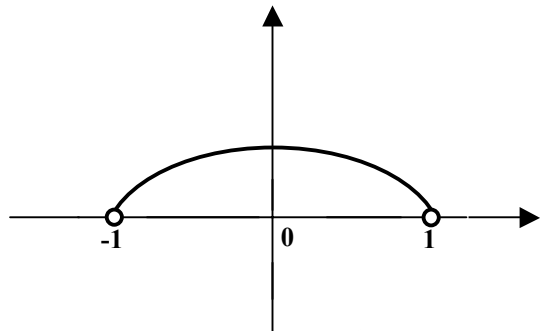


α		
Σωστό	51	94%
Λάθος	3	6%

β		
Σωστό	50	93%
Λάθος	4	7%

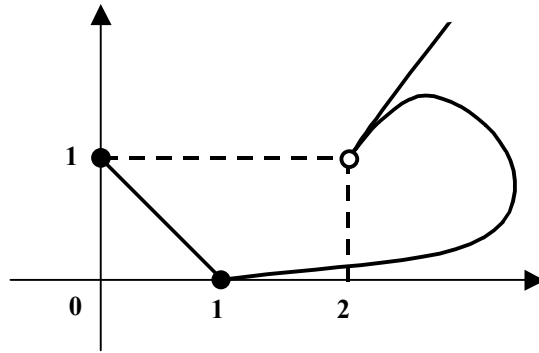


α		
Σωστό	35	65%
Λάθος	19	35%

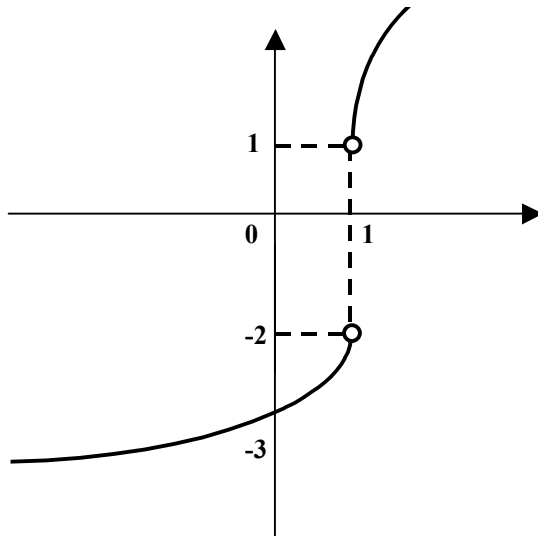


α		
Σωστό	49	91%
Λάθος	5	9%

β		
Σωστό	23	43%
Λάθος	22	41%
Δε γνωρίζω	9	17%

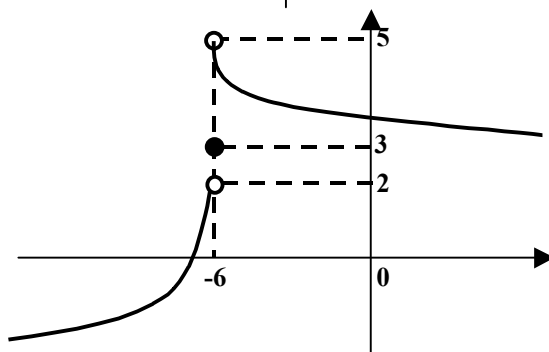


α		
Σωστό	48	89%
Λάθος	5	9%
Δε γνωρίζω	1	2%



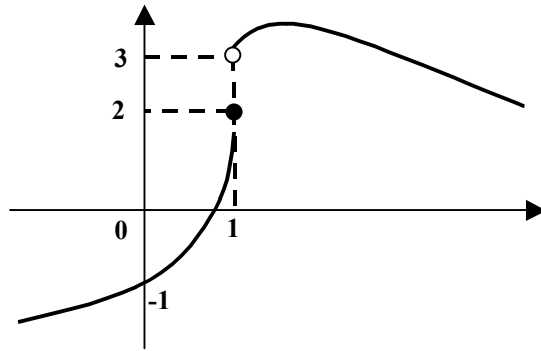
α		
Σωστό	48	89%
Λάθος	6	11%

β		
Σωστό	4	7%
Λάθος	40	74%
Δε γνωρίζω	10	19%



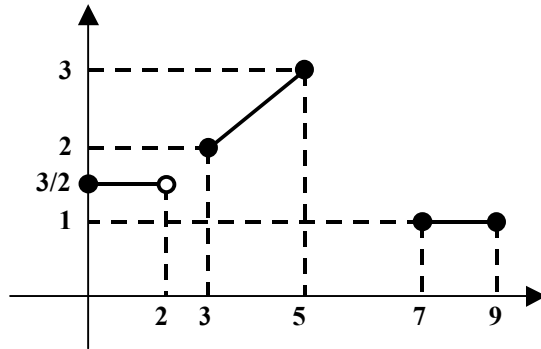
α		
Σωστό	43	80%
Λάθος	11	20%

β		
Σωστό	21	39%
Λάθος	24	44%
Δε γνωρίζω	9	17%



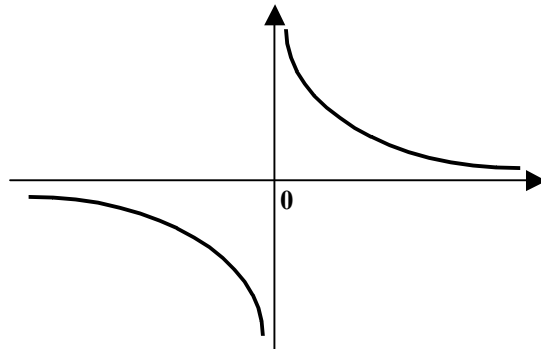
α		
Σωστό	45	83%
Λάθος	9	17%

β		
Σωστό	21	39%
Λάθος	23	43%
Δε γνωρίζω	10	19%



α		
Σωστό	44	81%
Λάθος	9	17%
Δε γνωρίζω	1	2%

β		
Σωστό	6	11%
Λάθος	31	57%
Δε γνωρίζω	17	31%



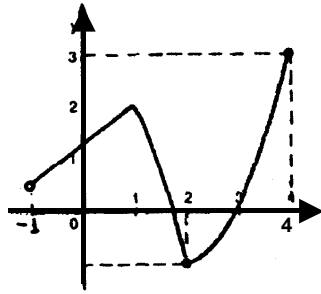
α		
Σωστό	50	93%
Λάθος	4	7%

β		
Σωστό	17	31%
Λάθος	21	39%
Δε γνωρίζω	16	30%

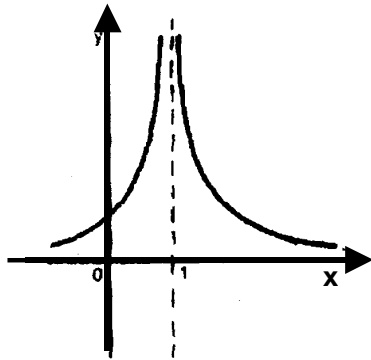
- Συνολικά στο ερώτημα για το ποια γραφήματα παριστάνουν γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης απαντούν σωστά 24 φοιτητές / φοιτήτριες (44%)
- Συνολικά στα ερωτήματα που αφορούν στη συνέχεια όσων είναι συναρτήσεις απαντούν σωστά μόνο 2 παιδιά (4%)

- Τα δύο παραπάνω παιδιά είναι και τα μοναδικά που έχουν απαντήσει σωστά στο σύνολο της ερώτησης E19.
- 27 φοιτητές / φοιτήτριες (50%) έχουν εξετάσει τη συνέχεια για κάποιο γράφημα που δε θεωρούν συνάρτηση.

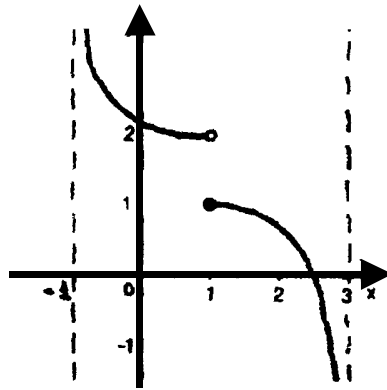
E20. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f με γραφική παράσταση:



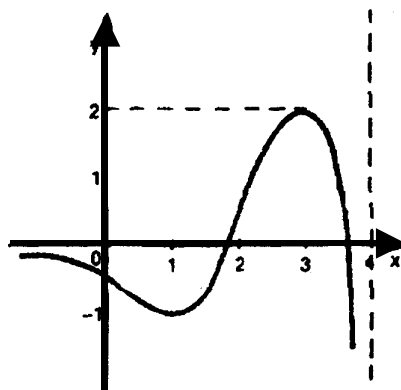
Σωστό	46	85%
Λάθος	8	15%



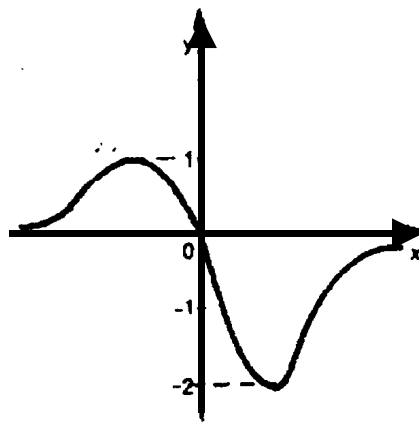
Σωστό	34	63%
Λάθος	19	35%
Δε γνωρίζω	1	2%



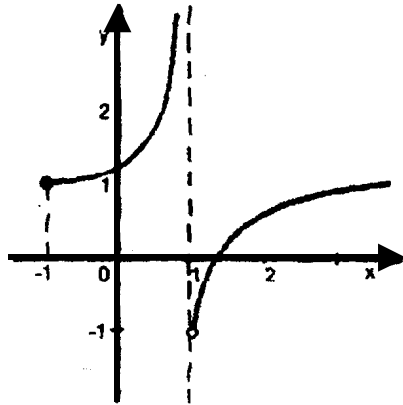
Σωστό	20	37%
Λάθος	34	63%



Σωστό	36	67%
Λάθος	17	31%
Δε γνωρίζω	1	2%



Σωστό	43	80%
Λάθος	10	19%
Δε γνωρίζω	1	2%



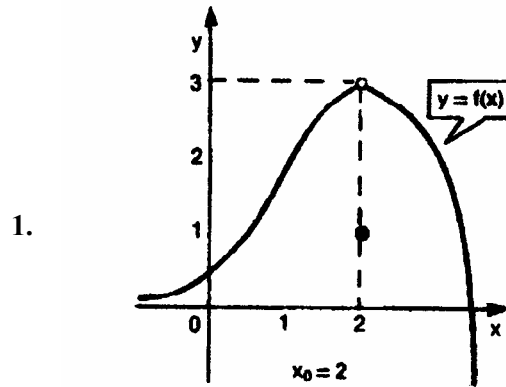
Σωστό	33	61%
Λάθος	19	35%
Δε γνωρίζω	2	4%

- Το 50% των λαθών περίπου οφείλεται σε λανθασμένο πεδίο ορισμού και το υπόλοιπο σε λανθασμένο σύνολο τιμών.
- Ένα συνηθισμένο λάθος είναι η παρουσίαση ενός διαστήματος «όπως το βλέπουμε στο σχήμα» πχ $[1, -\infty)$. Συνολικά 7 παιδιά (13%) κάνουν τέτοιο λάθος σε κάποια από τις ερωτήσεις.

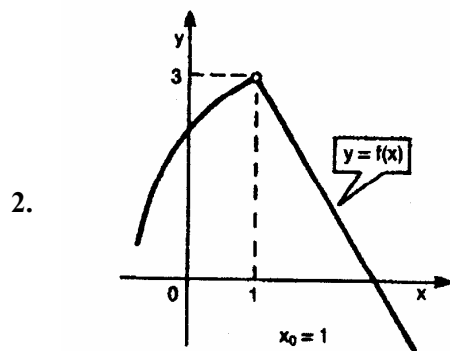
Στο σύνολο της Ε20 απαντούν σωστά 8 φοιτητές / φοιτήτριες (15%)

E21. Για τις επόμενες συναρτήσεις βρείτε, εφόσον υπάρχουν, το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και το $f(x_0)$, για το x_0 που δίνεται στο κάθε διάγραμμα.

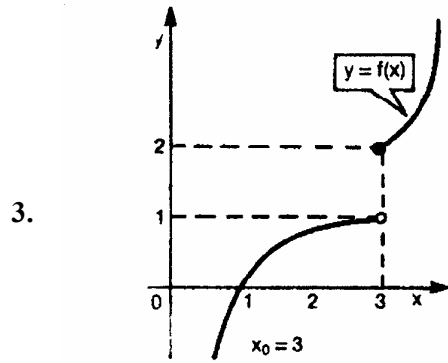
Αν δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, σημειώστε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Ακόμα, σημειώστε $f(x_0)$, αν δεν ορίζεται το $f(x_0)$.



Σωστό	32	59%
Λάθος	21	39%
Δε γνωρίζω	1	2%



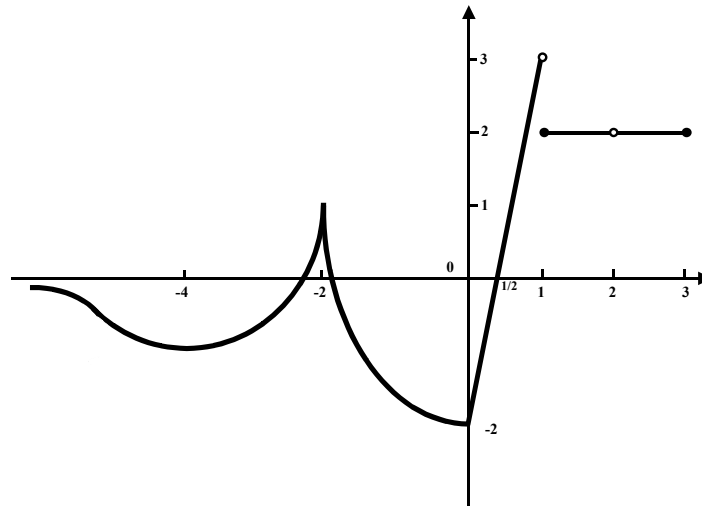
Σωστό	40	74%
Λάθος	12	22%
Δε γνωρίζω	2	4%



Σωστό	39	72%
Λάθος	13	24%
Δε γνωρίζω	2	4%

Στο σύνολο των ερωτημάτων της E21 απαντούν σωστά 28 φοιτητές / φοιτήτριες (52%)

Ε22. Για τη συνάρτηση f δίνεται η γραφική της παράσταση και οι επόμενοι ισχυρισμοί. Σημειώστε με [Α] εκείνους που είναι αληθείς, με [Ψ] όσους είναι αναληθείς και με [Δ] αυτούς για τους οποίους η γραφική παράσταση δε δίνει καμία πληροφορία.



(i) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1.$

Σωστό	50	93%
Λάθος	4	7%

(ii) Δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Σωστό	41	76%
Λάθος	10	19%
Δε γνωρίζω	3	6%

(iii) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$

Σωστό	37	69%
Λάθος	17	31%

(iv) $\lim_{x \rightarrow >2} f(x) = 1$

Σωστό	43	80%
Λάθος	10	19%
Δε γνωρίζω	1	2%

(v) $f'(3) = 0$

Σωστό	41	76%
Λάθος	12	22%
Δε γνωρίζω	1	2%

(vi) $f'(\frac{1}{2}) = 0$

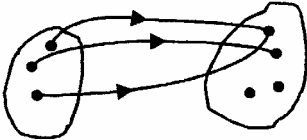
Σωστό	29	54%
Λάθος	24	44%

		Δε γνωρίζω	1	2%
(vii)	$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$	Σωστό	48	59%
		Λάθος	6	39%
(viii)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$	Σωστό	20	37%
		Λάθος	33	61%
		Δε γνωρίζω	1	2%
(ix)	Η f είναι συνεχής στο 3	Σωστό	41	76%
		Λάθος	13	24%
(x)	Η f έχει παράγωγο στο $x_0 = 0$	Σωστό	30	56%
		Λάθος	21	39%
		Δε γνωρίζω	3	6%
(xi)	Η f έχει παράγωγο στο $x_0 = 1$	Σωστό	36	67%
		Λάθος	14	26%
		Δε γνωρίζω	4	7%
(xii)	$f'(-4) = 0$	Σωστό	33	61%
		Λάθος	20	37%
		Δε γνωρίζω	1	2%

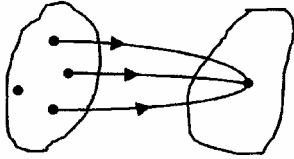
- Στο σύνολο των ερωτήσεων που σχετίζονται με την έννοια του ορίου απαντούν σωστά 9 φοιτητές / φοιτήτριες (17%)
- Στο σύνολο των ερωτήσεων που σχετίζονται με την έννοια της παραγώγου απαντούν σωστά 9 φοιτητές / φοιτήτριες (17%)

Στο σύνολο της ερώτησης E22 απαντούν σωστά 2 φοιτητές / φοιτήτριες (4%). Και οι δύο παρουσιάζουν ιδιαίτερα καλή συνολική εικόνα.

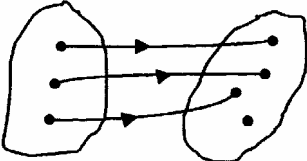
E23. Σημειώστε με [σ] τα διαγράμματα τα οποία ορίζουν συνάρτηση. Δικαιολογήστε την αδυναμία εκείνων που δεν ορίζουν συνάρτηση.

1. 

Σωστό	44	81%
Λάθος	6	11%
Δε γνωρίζω	4	7%

2. 

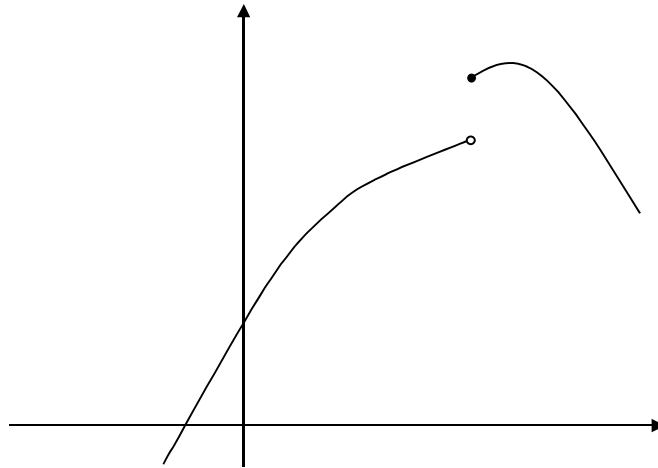
Σωστό	34	63%
Λάθος	14	26%
Δε γνωρίζω	6	11%

3. 

Σωστό	53	98%
Λάθος	1	2%

- Στο σύνολο της E23 απαντούν σωστά 28 φοιτητές / φοιτήτριες (52%).
- Οι ερωτήσεις E16, E18, E19α και E23 σχετίζονται με τον έλεγχο του ορισμού της έννοιας της συνάρτησης. Στο σύνολο όλων αυτών των ερωτήσεων (πλην εκείνης με το ορισμένο ολοκλήρωμα) απαντούν σωστά μόνο 2 φοιτητές / φοιτήτριες (4%).
- Από τους παραπάνω δύο μόνο ο ένας έχει σωστές και όλες τις ερωτήσεις E20 (πεδίο ορισμού – σύνολο τιμών)

Ε24. Δίνεται στο παρακάτω σχήμα η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



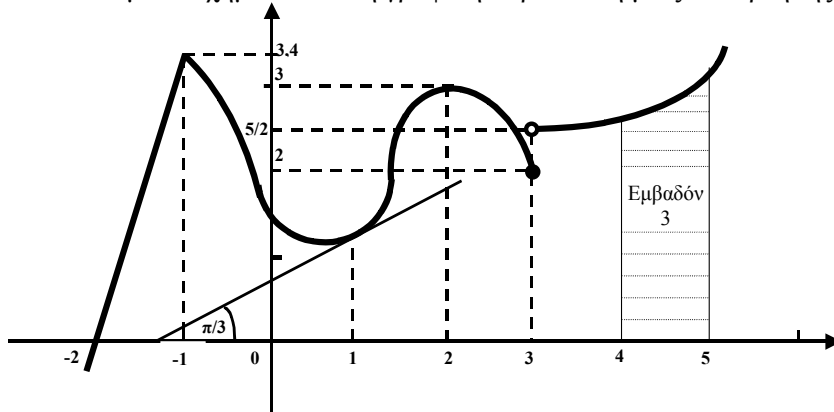
Σημειώστε στο σχήμα τις πληροφορίες που παίρνετε από τις παρακάτω σχέσεις. Ακόμα, διατυπώστε μετά από κάθε σχέση την πληροφορία που σας δίνει.

(i)	$f(0) = 1,6$	Σωστό	52	96%
		Λάθος	2	4%
(ii)	$f(-1) = 0$	Σωστό	52	96%
		Λάθος	2	4%
(iii)	$f(1) = 2$	Σωστό	52	96%
		Λάθος	2	4%
(iv)	$f'(1) = 1$	Σωστό	24	44%
		Λάθος	10	19%
		Δε γνωρίζω	20	37%
(v)	$\int_1^2 f(x)dx = 3,65$	Σωστό	10	19%
		Λάθος	5	9%
		Δε γνωρίζω	39	72%
(vi)	$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$	Σωστό	48	89%
		Λάθος	2	4%
		Δε γνωρίζω	4	7%
(vii)	$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 6$	Σωστό	48	89%
		Λάθος	2	4%
		Δε γνωρίζω	4	7%

(viii)	$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 5$	Σωστό	48	89%
		Λάθος	2	4%
		Δε γνωρίζω	4	7%

- Στο σύνολο των ερωτήσεων που σχετίζονται άμεσα με την έννοια του ορίου (vi) , (vii) και (viii) απαντούν σωστά 46 φοιτητές / φοιτήτριες (85%)
- Εκτός από τους φοιτητές / φοιτήτριες που απάντησαν σωστά στην ερώτηση (iv) υπάρχουν και άλλα τέσσερα παιδιά που μολονότι δεν έφεραν την εφαπτομένη στο σημείο 1 και δεν ανέγραψαν στο σχήμα κάτι σε σχέση με την κλίση αυτής, διατύπωσαν στο περιθώριο του ερωτήματος το γεγονός ότι η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο 1 θα σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα xx' ή ότι η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο 1 έχει κλίση 1.
- Στο σύνολο της ερώτησης E24 (πλην της ερώτησης (v) με το ολοκλήρωμα) απαντούν σωστά 20 φοιτητές / φοιτήτριες (37%).

Ε25. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f



Σημειώστε στο σχήμα με:

1. **Κ** τα σημεία καμπής

Σωστό	3	4%
Λάθος	28	52%
Δε γνωρίζω	24	44%

2. **Π** τα σημεία χωρίς παράγωγο

Σωστό	27	50%
Λάθος	21	39%
Δε γνωρίζω	6	11%

3. **Ο** τα σημεία με παράγωγο μηδέν

Σωστό	20	37%
Λάθος	21	39%
Δε γνωρίζω	13	24%

4. **Μ** τα σημεία τοπικού μεγίστου

Σωστό	29	54%
Λάθος	23	43%
Δε γνωρίζω	2	4%

5. **Ε** τα σημεία τοπικού ελαχίστου

Σωστό	24	44%
Λάθος	27	50%
Δε	3	6%

6.	X τα σημεία στα οποία δεν υπάρχει όριο	γνωρίζω		
		Σωστό	42	78%
		Λάθος	5	9%
		Δε γνωρίζω	7	13%

Συμπληρώστε τις ισότητες

7.	$\int_3^4 f =$	Σωστό	17	31%
		Λάθος	1	2%
		Δε γνωρίζω	36	67%

8.	$f'(1) =$	Σωστό	34	63%
		Λάθος	9	17%
		Δε γνωρίζω	11	20%

- Η έννοια του σημείου καμπής ήταν εκτός της ύλης των εξετάσεων της γ' Λυκείου, γεγονός που δικαιολογεί το πλήθος των σωστών απαντήσεων στην E25.1. Εντύπωση μολαταύτα, προκαλεί το γεγονός ότι περισσότεροι από τους μισούς φοιτητές / φοιτήτριες δοκιμάζουν να απαντήσουν στο ερώτημα σε αντίθεση με τα ερωτήματα που σχετίζονται με το ορισμένο ολοκλήρωμα από τα οποία απέχουν.
- Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι 21 από αυτούς που απάντησαν λανθασμένα στην E25.1 δίνουν σαν σημεία καμπής, σημεία αλλαγής της μονοτονίας (κυρίως τα 1 και 2 και πιο σπάνια και το -1).
- Στο ερώτημα E25.2 έχουμε θεωρήσει σωστή την απάντηση όλων εκείνων που έδωσαν τα σημεία -1 και 3. Το σημείο 1,5 στο οποίο η εφαπτομένη είναι κατακόρυφη ευθεία (οπότε επίσης δεν υπάρχει παράγωγος), δεν το έχει σημειώσει κανένας φοιτητής / φοιτήτρια. Το σημείο -1 το σημείωσαν 41 φοιτητές / φοιτήτριες (76%) και το σημείο 3 το σημείωσαν 31 (57%).
- Στα ερωτήματα E25.2, E25.3 και E25.8 που σχετίζονται με την έννοια της παραγώγου (εξαιρούμενης της κατακόρυφης εφαπτομένης), απαντούν σωστά 9 φοιτητές / φοιτήτριες (17%)

- Στα ερωτήματα E25.4 και E24.5 για τα ακρότατα απαντούν σωστά 15 φοιτητές / φοιτήτριες (28%)
- Ενώ στο σύνολο της E25 πλην του ολοκληρώματος (E25.7) και των σημείων καμπής (E25.1) απαντούν σωστά 5 φοιτητές / φοιτήτριες (9%).

ΠΕΙΡΑΜΑ – ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΣΥΝΘΗΚΕΣ

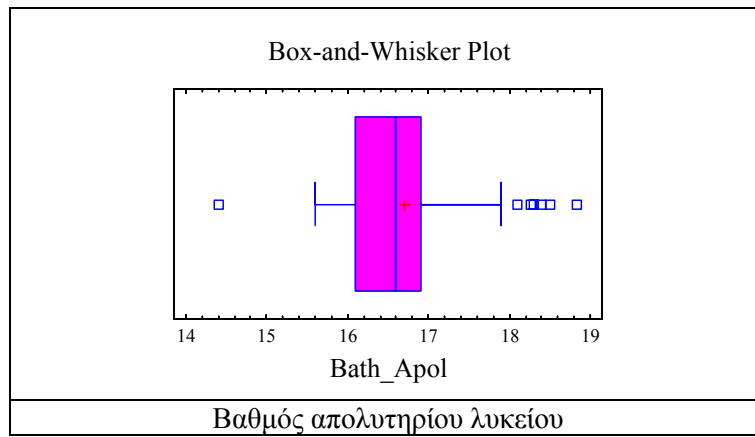
- Τα ερωτηματολόγια δόθηκαν σε ένα δείγμα 59 πρωτοετών φοιτητών του Τμήματος Μεθοδολογίας Ιστορίας και Θεωρίας της Επιστήμης (συντ. ΜΙΘΕ) του Πανεπιστημίου Αθηνών.
- Η εξέταση πραγματοποιήθηκε την Πέμπτη 12 Οκτωβρίου 2000 και αφότου οι φοιτητές / φοιτήτριες είχαν παρακολουθήσει δύο τρίωρα εισαγωγικά μαθήματα στο μάθημα της Μαθηματικής Ανάλυσης (και άλλα αντίστοιχα δύο τρίωρα ασκήσεων). Έως τότε είχαν συζητήσει μονάχα για σύνολα και πράξεις συνόλων.
- Η εξέταση είχε διάρκεια μιάμιση ώρα και πραγματοποιήθηκε κατά το μάθημα της Μαθηματικής Ανάλυσης Ι στο κομμάτι των φροντιστηριακών ασκήσεων.
- Οι φοιτητές / φοιτήτριες δεν είχαν ενημερωθεί για την εξέταση.
- Κάθε φοιτητής εργάστηκε μόνος του. Δεν υπήρχε καμία συνεργασία μεταξύ τους.
- Στο δείγμα αυτό δεν έχουν εξεταστεί όλοι οι φοιτητές / φοιτήτριες στα Μαθηματικά τον Ιούνιο του 2000, διότι κάποιοι από αυτούς προέρχονται από κατεύθυνση ή δέσμη που δεν είχε Μαθηματικά.
- Η κατανομή των φοιτητών σύμφωνα με το εκπαιδευτικό σύστημα που ακολούθησαν στο σχολείο είναι όπως παρακάτω.

1	Θετική Κατεύθυνση	6	10,17%
2	Θεωρητική κατεύθυνση	37	62,71%
3	Τεχνολογική Κατεύθυνση	5	8,47%
4	Τρίτη Δέσμη	9	15,25%
5	Τέταρτη Δέσμη	2	3,39%

- Ο μέσος όρος των βαθμών απολυτηρίου λυκείου των φοιτητών είναι 16,69

Επτά φοιτητές δε συμπλήρωσαν το βαθμό απολυτηρίου λυκείου. Γι' αυτούς δεν έγινε καμία υπόθεση. Απλώς δεν ελήφθησαν στον υπολογισμό του μέσου όρου.

- Μια καλύτερη εικόνα για το επίπεδο των μαθητών παίρνουμε από το θηκόγραμμα για το βαθμό απολυτηρίου λυκείου.



Οι πληροφορίες που παίρνουμε από το θηκόγραμμα εξηγούνται στα αντίστοιχα για το Τμήμα Μαθηματικών (σελίδα 15).7

ΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

Στο μέρος αυτό παρατίθενται μια προς μια οι ερωτήσεις που περιλάμβανε το ερωτηματολόγιο του ΜΙΘΕ. Οι ερωτήσεις βρίσκονται στη σειρά με την οποία δόθηκαν και στους φοιτητές. Η ανάλυση ακολουθεί το μοντέλο που ακολουθήσαμε και στην ανάλυση των αποτελεσμάτων για το Τμήμα Μαθηματικών.

A. Στις ερωτήσεις 1 – 15 να συγκρίνετε τους αριθμούς συμπληρώνοντας κατάλληλα στο κουτί κάποιο από τα σύμβολα $<$, $=$, $>$.

	Για το ζεύγος		Σωστό	Λάθος	Δε γνωρίζω
1.	-2	$-\frac{7}{3}$	48 (81%)	10 (17%)	1 (2%)
2.	$\frac{101}{5}$	$\frac{101}{7}$	58 (98%)	1 (2%)	0
3.	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{4}$	40 (68%)	17 (29%)	2 (3%)
4.	-600^{37}	-600^{86}	48 (81%)	11 (19%)	0
5.	$\frac{46}{25}$	$-\frac{139}{75}$	55 (93%)	4 (7%)	0
6.	0,999....	0,999	36 (61%)	23 (39%)	0
7.	1,07	1,077	39 (66%)	18 (31%)	2 (3%)
8.	$0,4^5$	$0,4^7$	16 (27%)	43 (73%)	0

9.	$-0,3^{31}$	$-0,3^{56}$	17 (29%)	42 (71%)	0
10.	1,999...	2	3 (5%)	56 (95%)	0
11.	$\ln 0,2$	0	21 (36%)	29 (49%)	9 (15%)
12.	$(-200)^3$	-200^3	53 (90%)	5 (8%)	1 (2%)
13.	$\ln 1$	0	48 (81%)	5 (8%)	6 (10%)
14.	$\ln 1,3$	0	45 (76%)	5 (8%)	9 (15%)
15.	συν 37°	συν 56°	23 (39%)	23 (39%)	13 (22%)

- Κανένας φοιτητής /φοιτήτρια δεν απαντά σωστά σε όλα τα υποερωτήματα της Α
- Σε όλα εκτός από το ερώτημα Α10, το οποίο είναι ιδιαίζον, απαντούν σωστά 3 φοιτητές /φοιτήτριες (5%).
- Σε όλες τις ερωτήσεις που αφορούν στις εκθετικές συναρτήσεις (Α4, Α8, Α9 και Α12) απαντούν σωστά 7 φοιτητές /φοιτήτριες (12%) (ακόμη και δίχως την Α12 που δεν αντιστοιχίζεται στο Μαθηματικό οι ίδιοι 7 έχουν σωστά όλες τις εκθετικές).
- Σε όλες τις ερωτήσεις που αφορούν στη λογαριθμική συνάρτηση (Α11, Α13, Α14) απαντούν σωστά 19 φοιτητές /φοιτήτριες (32%)

B. Στις ερωτήσεις 16– 21 δίνονται ζεύγη αριθμών. Εάν υπάρχει κάποιος αριθμός μεταξύ των αριθμών του ζεύγους σημειώστε τον στο κενό. Εάν δεν υπάρχει, γράψτε στο κενό «Δεν υπάρχει».

	Για το ζεύγος		Σωστό	Λάθος	Δε γνωρίζω
16.	0,1	0,11	19 (32%)	31 (53%)	9 (15%)
17.	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	26 (44%)	17 (29%)	16 (27%)
18.	0,777...	0,7778	3 (5%)	50 (85%)	6 (10%)
19.	0,999...	1	50 (85%)	6 (10%)	3 (5%)
20.	0,555...	0,666...	41 (69%)	9 (15%)	9 (15%)
21.	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	28 (47%)	17 (19%)	14 (24%)

- Σε ολόκληρη την ομάδα των ερωτήσεων B απαντά ένας φοιτητής (2%) σωστά. Ο φοιτητής αυτός προέρχεται από τη θετική κατεύθυνση και είναι άριστος στα Μαθηματικά. Η εικόνα του στο ερωτηματολόγιο είναι πολύ καλή.
- Στις ερωτήσεις B16, B18, B19, B21 που αντιστοιχίζονται σε ερωτήσεις του Μαθηματικού Τμήματος απαντά σωστά μόνο ο φοιτητής της προηγούμενης παρατήρησης.
- Σε ολόκληρη την ομάδα των ερωτήσεων B πλην της ερώτησης B18 απαντούν σωστά 8 φοιτητές /φοιτήτριες (14%)

Γ. Στις ερωτήσεις 22 – 24 συμπληρώστε τις πράξεις:

22. $1230 \begin{array}{|l} 90 \\ \hline \end{array}$ **23.** $0,312 \begin{array}{|l} 0,52 \\ \hline \end{array}$ **24.** $\begin{array}{r} 0,312 \\ \times 0,52 \\ \hline \end{array}$

Στην ερώτηση:	Σωστό	Λάθος	Δε γνωρίζω
22	40 (68%)	17 (29%)	2 (3%)
23	39 (66%)	18 (31%)	2 (3%)
24	50 (85%)	6 (10%)	3 (5%)

- Στο σύνολο των ερωτήσεων Γ απαντούν σωστά 27 φοιτητές /φοιτήτριες (46%)
- Μονάχα ένας φοιτητής κάνει λάθος στον πολλαπλασιασμό ενώ έχει εκτελέσει σωστά και τις δύο διαιρέσεις.

Δ. Στις ερωτήσεις 25 – 32 συμπληρώστε κατάλληλα το κενό

25. Γράψτε ένα φυσικό αριθμό.....

- Απάντησαν όλοι σωστά εκτός από μια φοιτήτρια που δεν απάντησε σε καμία από τις ερωτήσεις Δ25 έως Δ32.

26. Γράψτε ένα ρητό αριθμό που δεν είναι φυσικός.....

Σωστό	46	78%
Λάθος	7	12%
Δε γνωρίζω	6	10%

- Οι λανθασμένες απαντήσεις είναι του τύπου: $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{2}$

27. Γράψτε έναν άρρητο αριθμό.....

Σωστό	39	66%
-------	----	-----

Λάθος	14	24%
Δε γνωρίζω	6	10%

- Κάποιες χαρακτηριστικές λανθασμένες απαντήσεις είναι οι εξής:
 $\ln 1$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{4}$, $3,14444\dots$, $0,3$
- Στην ομάδα των Δ25, Δ26, Δ27 απάντησαν σωστά 31 φοιτητές /φοιτήτριες (53%)

28. Πόσοι πραγματικοί αριθμοί της μορφής $a\sqrt{2}$, όπου a ακέραιος αριθμός, βρίσκονται ανάμεσα στο -2 και στο 4;

Σωστό	2	3%
Λάθος	28	47%
Δε γνωρίζω	29	49%

- Οι δύο φοιτητές που απάντησαν σωστά προέρχονται και οι δύο από τη θετική κατεύθυνση και είναι άριστη η εικόνα του ερωτηματολογίου τους. (ο ένας είναι εκείνος που έχουμε ξανασυναντήσει στις ερωτήσεις Β).
- Δυο φοιτητές /φοιτήτριες απάντησαν ότι βρίσκονται άπειροι ακέραιοι στο διάστημα.

29. Πόσοι πραγματικοί αριθμοί βρίσκονται ανάμεσα στο 0 και στο 1;

Σωστό	29	49%
Λάθος	21	36%
Δε γνωρίζω	9	15%

30. Ποιος από τους αριθμούς της ερώτησης 29 είναι πιο κοντά στο 1;

Σωστό	1	2%
Λάθος	46	78%
Δε γνωρίζω	12	20%

- Η μοναδική φοιτήτρια που απάντησε σωστά στην ερώτηση αυτή, έχει απαντήσει λανθασμένα στην ερώτηση Δ29 (κανένας). Συνεπώς εφόσον υποστήριξε ότι ανάμεσα στο 0 και στο 1 δεν υπάρχει κανένας πραγματικός αριθμός πώς θα ήταν δυνατόν να είναι κάποιος πιο κοντά στο 1.
- Η απάντηση που κυριαρχεί στην ερώτηση Δ30 είναι ο αριθμός 0,999... σε ποσοστό 76%.

31. Ποιος από τους αριθμούς της ερώτησης 29 είναι πιο κοντά στο 0;

.....

Σωστό	1	2%
Λάθος	42	78%
Δε γνωρίζω	16	20%

- Η σωστή απάντηση είναι της φοιτήτριας που έδωσε σωστή απάντηση στην Δ30, συνεπώς ισχύουν οι ίδιες παρατηρήσεις.
- Η απαντήσεις που κυριαρχούν στην ερώτηση Δ31 είναι σε ποσοστό 69%, είναι αριθμοί της μορφής: 0,01 0,0001 είτε το 0,000...01 (?)

32. Υπάρχει ρητός που είναι μεγαλύτερος του $\frac{3}{5}$ και τέτοιος, ώστε να μη

υπάρχει κανένας άλλος αριθμός ανάμεσα σ' αυτόν και τον $\frac{3}{5}$; Αν ναι,

τότε γράψτε ποιος είναι. Αν δεν υπάρχει, γράψτε: “Δεν υπάρχει”.....

Σωστό	25	42%
Λάθος	7	12%
Δε γνωρίζω	27	46%

Z. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λανθασμένες τις επόμενες προτάσεις, σημειώνοντας κάθε φορά το αντίστοιχο τετράγωνο. Σημειώστε το τελευταίο τετράγωνο αν δε ξέρετε την απάντηση.

Z1		Σωστό	Λάθος	Δε γνωρίζω
33.	Ο $\sqrt{2}$ είναι πραγματικός αριθμός.	36 (61%)	17 (29%)	6 (10%)
34.	Ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός αριθμός.	48 (81%)	7 (12%)	4 (7%)
35.	Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός.	48 (81%)	6 (10%)	5 (8%)
36.	Ο $\sqrt{2}$ γράφεται σε δεκαδική μορφή με άπειρα δεκαδικά ψηφία.	36 (61%)	16 (27%)	7 (12%)
37.	Ο $\sqrt{2}$ γράφεται σε δεκαδική μορφή με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία.	36 (61%)	12 (20%)	11 (19%)
38.	Ο $\sqrt{2}$ δε γράφεται σε δεκαδική μορφή.	48 (81%)	5 (8%)	6 (10%)

- Συνολικά στις ερωτήσεις Z33 –Z38 απαντούν σωστά 16 φοιτητές /φοιτήτριες (27%)

Z2		Σωστό	Λάθος	Δε γνωρίζω
39	Ο 3,46 είναι πραγματικός αριθμός.	53 (90%)	3 (5%)	3 (5%)
40	Ο 3,46 είναι ρητός αριθμός.	44 (75%)	10 (17%)	5 (8%)
41	Ο 3,46 είναι άρρητος αριθμός.	44 (75%)	9 (15%)	6 (10%)

- Στο σύνολο των Z39 –Z41 απαντούν σωστά 39 φοιτητές /φοιτήτριες (66%).

Z3		Σωστό	Λάθος	Δε γνωρίζω
42	Ο 1,101001000... είναι	44	11	4

	πραγματικός αριθμός.	(75%)	(19%)	(7%)
43	Ο $1,101001000\dots$ είναι ρητός αριθμός.	25 (42%)	27 (46%)	7 (12%)
44	Ο $1,101001000\dots$ είναι άρρητος αριθμός.	24 (41%)	27 (46%)	8 (14%)

- Στο σύνολο των Z42 –Z44 απαντούν σωστά 17 φοιτητές /φοιτήτριες (29%).

Z4		Σωστό	Λάθος	Δε γνωρίζω
45	Ο $0,7777\dots$ είναι πραγματικός αριθμός.	47 (80%)	8 (14%)	4 (7%)
46	Ο $0,7777\dots$ είναι ρητός αριθμός.	30 (51%)	26 (44%)	3 (5%)
47	Ο $0,7777\dots$ είναι άρρητος αριθμός.	29 (49%)	25 (42%)	5 (8%)

- Τρεις φοιτητές /φοιτήτριες (5%) υποστηρίζουν ότι ο αριθμός $0,777\dots$ είναι συγχρόνως και ρητός και άρρητος. Στις προηγούμενες ερωτήσεις της ομάδας Z δεν έχει εμφανιστεί κάτι τέτοιο.
- Στο σύνολο των Z45 –Z47 απαντούν σωστά 21 φοιτητές /φοιτήτριες (36%).

Z5		Σωστό	Λάθος	Δε γνωρίζω
48	Ο $\frac{2}{3}$ είναι πραγματικός αριθμός.	44 (75%)	12 (20%)	3 (5%)
49	Ο $\frac{2}{3}$ είναι ρητός αριθμός.	56 (95%)	0	3 (5%)
50	Ο $\frac{2}{3}$ είναι άρρητος αριθμός.	54 (92%)	1 (2%)	4 (7%)
51	Ο $\frac{2}{3}$ γράφεται σε δεκαδική	38 (64%)	16 (27%)	5 (8%)

	μορφή με άπειρα δεκαδικά ψηφία.			
52	Ο $\frac{2}{3}$ γράφεται σε δεκαδική μορφή με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία.	37 (63%)	15 (25%)	7 (12%)
53	Ο $\frac{2}{3}$ δε γράφεται σε δεκαδική μορφή.	54 (92%)	3 (5%)	2 (3%)

- Και στην ερώτηση αυτή μια φοιτήτρια, η οποία προέρχεται από τη θεωρητική κατεύθυνση, υποστηρίζει ότι ο $\frac{2}{3}$ είναι ρητός και άρρητος. Γενικότερα δεν έχει καλή εικόνα στο γραπτό της.
- Στο σύνολο των Z48 –Z53 απαντούν σωστά 26 φοιτητές /φοιτήτριες (44%).

Z6		Σωστό	Λάθος	Δε γνωρίζω
54	Κάθε πραγματικός αριθμός γράφεται με δεκαδική μορφή.	21 (36%)	33 (56%)	5 (8%)
55	Κάθε αριθμός που γράφεται με δεκαδική μορφή είναι πραγματικός	35 (59%)	20 (34%)	4 (7%)

- Στο σύνολο των Z54 –Z55 απαντούν σωστά 10 φοιτητές /φοιτήτριες (17%).

Z7		Σωστό	Λάθος	Δε γνωρίζω
56	Ο -37589482736 είναι πραγματικός αριθμός.	53 (90%)	2 (3%)	4 (7%)
57	Ο -37589482736 είναι ρητός αριθμός.	32 (54%)	15 (25%)	12 (20%)
58	Ο -37589482736 είναι άρρητος αριθμός.	39 (66%)	9 (15%)	11 (19%)

59	Ο -37589482736 είναι φυσικός αριθμός.	36 (61%)	17 (29%)	6 (10%)
60	Ο -37589482736 είναι ακέραιος αριθμός.	45 (76%)	9 (15%)	5 (8%)

- Στο σύνολο των Z56 –Z60 απαντούν σωστά 17 φοιτητές /φοιτήτριες (29%).

Z8		Σωστό	Λάθος	Δε γνωρίζω
61	Ο 25,313131... είναι πραγματικός αριθμός.	49 (83%)	5 (8%)	5 (8%)
62	Ο 25,313131... είναι ρητός αριθμός.	30 (51%)	17 (29%)	12 (20%)
63	Ο 25,313131... είναι άρρητος αριθμός.	33 (56%)	18 (31%)	8 (14%)
64	Ο 25,313131... είναι φυσικός αριθμός.	21 (36%)	30 (51%)	8 (14%)
65	Ο 25,313131... είναι ακέραιος αριθμός.	46 (78%)	8 (14%)	5 (8%)

- Στο σύνολο των Z61 –Z65 απαντούν σωστά 8 φοιτητές /φοιτήτριες (14%).
- Κανένας φοιτητής /φοιτήτρια δεν έχει απαντήσει σε ολόκληρη την ομάδα των Z1 – Z8 σωστά. Κανένας επίσης δεν έχει απαντήσει σωστά σε 7 ομάδες από τις Z1 έως Z8 παρά μόνον δύο, που έχουν απαντήσει σωστά σε ολόκληρες τις ομάδες Z1 έως Z7, με μοναδικό τους λάθος στην Z8 στον αριθμό 25,313131... τον οποίο και θεωρούν άρρητο (ο ένας από αυτούς τους δυο είναι εκείνος που έχουμε αναφέρει πάλι σε αντίστοιχες περιπτώσεις).

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

Κατά τη σύνταξη του ερωτηματολογίου για το ΜΙΘΕ, κάποια ερωτήματα ελήφθησαν κατάλληλα ώστε να υπάρχει αντιστοιχία σε ερωτήματα που περιλαμβάνονται σε εκείνο του Τμήματος Μαθηματικών. Αυτά τα κοινά ερωτήματα σχετίζονται με τα σύνολα των αριθμών και τις ιδιότητές τους. Στην παράγραφο αυτή γίνεται μια σύγκριση των αποτελεσμάτων στο κοινό αυτό κομμάτι των ερωτηματολογίων.

E1. και Δ25. Γράψτε ένα φυσικό αριθμό.

Στην ερώτηση αυτή και στα δύο Τμήματα έχουμε σωστές απαντήσεις (με μια εξαίρεση στο ΜΙΘΕ)

E3. Γράψτε έναν ακέραιο αριθμό που δεν είναι φυσικός.

E4. Γράψτε έναν ρητό αριθμό που δεν είναι ακέραιος.

και

Δ26. Γράψτε έναν ρητό αριθμό που δεν είναι φυσικός.

Στις ερωτήσεις αυτές δεν υπάρχει πλήρης αντιστοιχία, όμως τα αποτελέσματα είναι αρκετά διαφορετικά στα δυο Τμήματα. Στο μεν Τμήμα Μαθηματικών δυο παιδιά απαντούν λανθασμένα στην E3, ενώ στην E4 όλοι έχουν απαντήσει σωστά, σε αντίθεση με το ΜΙΘΕ όπου υπάρχουν συνολικά 13 παιδιά (22%) που δεν απάντησαν σωστά (είτε απάντησαν λανθασμένα, είτε δεν απάντησαν καθόλου).

E5. Γράψτε ένα πραγματικό αριθμό που δεν είναι ρητός.

και

Δ27. Γράψτε έναν άρρητο αριθμό.

Ούτε στις ερωτήσεις E5 και Δ27 υπάρχει πλήρης αντιστοιχία στις εκφωνήσεις και αυτό γενικότερα δημιουργεί κάποια προβλήματα στη σύγκριση των απαντήσεων. Στο Τμήμα Μαθηματικών 8 φοιτητές /φοιτήτριες (15%) δεν απαντούν σωστά στην E5, ενώ στο ΜΙΘΕ 20 φοιτητές /φοιτήτριες (34%) δεν απαντούν σωστά στην Δ27.

Στο σύνολο των αντίστοιχων ομάδων ερωτήσεων

Στις ερωτήσεις E2 –E5 για το Τμήμα Μαθηματικών απαντούν σωστά 45 φοιτητές /φοιτήτριες, δηλαδή σε ποσοστό 83%

Ενώ στις ερωτήσεις Δ25 –Δ27 για το ΜΙΘΕ απαντούν σωστά 31 φοιτητές /φοιτήτριες, δηλαδή σε ποσοστό 53%.

Παρακάτω δίνονται τα κοινά (ή αντίστοιχα ερωτήματα) για τις ομάδες ερωτημάτων Ε6 για το Τμήμα Μαθηματικών και Α. για το ΜΙΘΕ υπό την κοινή εκφώνηση:

«Να συγκρίνετε τους αριθμούς συμπληρώνοντας κατάλληλα στο κενό κάποιο από τα σύμβολα $<$, $=$, $>$ »

	Για το ζεύγος:		Τμήμα Μαθηματικών			ΜΙΘΕ		
			Σωστό	Λάθος	Δε γνωρίζω	Σωστό	Λάθος	Δε γνωρίζω
1	-600^{37}	-600^{86}	63%	37%	0	81%	19%	0
2	0,999...	0,999	81%	17%	2%	61%	39%	0
3	$0,4^5$	$0,4^7$	61%	35%	4%	27%	73%	0
4	$-0,3^{31}$	$-0,3^{56}$	70%	30%	0	29%	71%	0
5	2,999...	3	6%	94%	0	5%	95%	0
	1,999...	2						

- Στο σύνολο των ερωτήσεων 1, 3, 4 που αφορούν στις εκθετικές συναρτήσεις στο Τμήμα Μαθηματικών απαντά σωστά το 29,63% έναντι του 12% στο ΜΙΘΕ.
- Σε κανένα από τα δύο Τμήματα δεν απαντά κάποιος σωστά στο σύνολο των ερωτήσεων 1- 5.
- Εξαιρουμένης της 5^{ης} ερώτησης στο σύνολο δηλαδή των 1 – 4 απαντά σωστά το 22% για το Τμήμα Μαθηματικών και το 5% για το ΜΙΘΕ.

Παρακάτω δίνονται τα κοινά (ή αντίστοιχα ερωτήματα) για τις ομάδες ερωτημάτων Ε7 για το Τμήμα Μαθηματικών και Β για το ΜΙΘΕ υπό την κοινή εκφώνηση:

«Δίνονται τα επόμενα ζεύγη αριθμών. Εάν υπάρχει κάποιος αριθμός μεταξύ των αριθμών του ζεύγους σημειώστε τον στο κενό. Εάν δεν υπάρχει, γράψτε στο κενό: “Δεν υπάρχει”»

	Για το ζεύγος		Τμήμα Μαθηματικών			ΜΙΘΕ		
			Σωστό	Λάθος	Δε γνωρίζω	Σωστό	Λάθος	Δε γνωρίζω
1	0,1	0,11	78%	22%	0	32%	53%	15%
2	0,777...	0,7778	81%	17%	2%	5%	85%	10%
3	2,999...	3	91%	6%	4%			
	0,999...	1				85%	10%	5%
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	85%	9%	6%	47%	19%	24%

- Στο σύνολο των 1 – 4 απαντά σωστά το 57% για το Τμήμα Μαθηματικών και το 2% (ένας φοιτητής) για το ΜΙΘΕ.

E8 και Δ32 με κοινή εκφώνηση:

Υπάρχει ρητός που είναι μεγαλύτερος του $\frac{3}{5}$ και τέτοιος, ώστε να μην

υπάρχει κανένας άλλος αριθμός ανάμεσα σ' αυτόν και τον $\frac{3}{5}$; Αν ναι, τότε γράψτε ποιος είναι. Αν δεν υπάρχει, γράψτε: “Δεν υπάρχει”

	Τμήμα Μαθηματικών	ΜΙΘΕ
Σωστό	78%	42%
Λάθος	13%	12%
Δε γνωρίζω	9%	46%

Για τις ομάδες ερωτήσεων E10 και Z1 έχουμε:

		Τμήμα Μαθηματικών			ΜΙΘΕ		
		Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω	Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω
1	Ο $\sqrt{2}$ είναι πραγματικός αριθμός.	93%	7,41%	0	61%	19%	10%
2	Ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός αριθμός.	94%	6%	0	81%	12%	7%
3	Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός.	94%	4%	2%	81%	10%	8%
4	Ο $\sqrt{2}$ γράφεται σε δεκαδική μορφή με άπειρα δεκαδικά ψηφία.	87%	13%	0	61%	27%	12%
5	Ο $\sqrt{2}$ γράφεται σε δεκαδική	83%	15%	2%	61%	20%	19%

	μορφή με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία.						
6	Ο $\sqrt{2}$ δε γράφεται σε δεκαδική μορφή.	50 (93%)	4 (7%)	0	81%	8%	10%

- Στο σύνολο της ερώτησης E10 (στο Τμήμα Μαθηματικών) απαντούν σωστά σε ποσοστό 72%, έναντι του αντίστοιχου 27% για την ερώτηση Z1 (ΜΙΘΕ)

Για τις ομάδες ερωτήσεων E11 και Z2 έχουμε:

		Τμήμα Μαθηματικών			ΜΙΘΕ		
		Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω	Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω
1	Ο 3,46 είναι πραγματικός αριθμός.	100%	0	0	90%	5%	5%
2	Ο 3,46 είναι ρητός αριθμός.	85%	15%	0	42%	46%	12%
3	Ο 3,46 είναι άρρητος αριθμός.	85%	15%	0	41%	46%	14%

- Στο σύνολο της ερώτησης E11 (στο Τμήμα Μαθηματικών) απαντούν σωστά σε ποσοστό 83%, έναντι του αντίστοιχου 66% για την ερώτηση Z2 (ΜΙΘΕ)

Για τις ομάδες ερωτήσεων E13 και Z4 έχουμε:

		Τμήμα Μαθηματικών			ΜΙΘΕ		
		Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω	Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω
1	Ο 0,7777... είναι πραγματικός αριθμός.	96%	4%	0	80%	14%	7%
2	Ο 0,7777... είναι ρητός αριθμός.	43%	57%	0	51%	44%	5%
3	Ο 0,7777... είναι άρρητος αριθμός.	43%	57%	0	49%	42%	8%

- Στο σύνολο της ερώτησης E13 (στο Τμήμα Μαθηματικών) απαντούν σωστά σε ποσοστό 37%, έναντι του αντίστοιχου 36% για την ερώτηση Z4 (ΜΙΘΕ)

Για τις ομάδες ερωτήσεων E14 και Z5 έχουμε:

E14.		Τμήμα Μαθηματικών			ΜΙΘΕ		
		Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω	Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω
1	$0 \frac{2}{3}$ είναι πραγματικός αριθμός.	94%	2%	4%	75%	20%	5%
2	$0 \frac{2}{3}$ είναι ρητός αριθμός.	85%	13%	2%	95%	0	5%
3	$0 \frac{2}{3}$ είναι άρρητος αριθμός.	85%	11%	4%	92%	2%	7%
4	$0 \frac{2}{3}$ γράφεται σε δεκαδική μορφή με άπειρα δεκαδικά ψηφία.	91%	7%	2%	64%	27%	8%
5	$0 \frac{2}{3}$ γράφεται σε δεκαδική μορφή με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία.	89%	9%	2%	63%	25%	12%
6	$0 \frac{2}{3}$ δε γράφεται σε δεκαδική μορφή.	98%	2%	0	92%	5%	3%

- Στο σύνολο της ερώτησης E14 (στο Τμήμα Μαθηματικών) απαντούν σωστά σε ποσοστό 69%, έναντι του αντίστοιχου 44% για την ερώτηση Z5 (ΜΙΘΕ)

Για τις ομάδες ερωτήσεων E15 και Z6 έχουμε:

E15.		Τμήμα Μαθηματικών			ΜΙΘΕ		
		Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω	Σωστό	Λάθος	Δεν ξέρω
1	Κάθε πραγματικός αριθμός γράφεται με δεκαδική	70%	28%	2%	36%	56%	8%

	μορφή.						
2	Κάθε αριθμός που γράφεται με δεκαδική μορφή είναι πραγματικός	67%	30%	4%	59%	34%	7%

- Στο σύνολο της ερώτησης E15 (στο Τμήμα Μαθηματικών) απαντούν σωστά σε ποσοστό 44%, έναντι του αντίστοιχου 17% για την ερώτηση Z6 (ΜΙΘΕ)
- Στις E10 – E11 – E13 – E14 – E15 για το Τμήμα Μαθηματικών απαντούν σε όλες σωστά σε ποσοστό 13%. Στο ΜΙΘΕ στις Z1 – Z2 – Z4 – Z5 – Z6 απαντά σωστά το 3%

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Στο μέρος αυτό γίνεται κάποια προσπάθεια να αξιολογήσουμε τη στατιστική ισχύ (ή μη) των αποτελεσμάτων των ερωτηματολογίων.

	Χαρακτηριστικό	Πληθυσμός	Δείγμα
ΣΥΝΟΛΙΚΑ	Μέγεθος	360	54
	Μέσος όρος βαθμών στα Μαθηματικά	-	16,75
	Μέσος όρος βαθμών Απολυτηρίου Λυκείου	-	17,75
ΔΕΞΜΕΣ	Μέγεθος	83 (23%)	9 (16,7%)
	Μέσος όρος βαθμών στα Μαθηματικά	15,7	16,45
	Μέσος όρος βαθμών Απολυτηρίου Λυκείου	-	17,97
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΙΣ	Μέγεθος κατευθύνσεις	277 (77%)	45 (83%)
	Μέσος όρος βαθμών στα Μαθηματικά	-	16,8
	Μέσος όρος βαθμών Απολυτηρίου Λυκείου	17,66	17,71

- Δε μπορούμε να έχουμε αξιόπιστο στατιστικό συμπέρασμα (ούτε καν για τους φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών)
- Λόγοι:
 - Μικρός πληθυσμός
 - Μικρό δείγμα

- Για την τεκμηρίωση των παραπάνω, αρχικά σε έναν πίνακα παραθέτουμε κάποια στοιχεία για τον πληθυσμό και για το δείγμα μας. (πρωτοετείς φοιτητές που εισήχθησαν στο Τμήμα Μαθηματικών με το Ελληνικό Εκπαιδευτικό σύστημα).
 - Μέγεθος πληθυσμού.
 - Πόσοι από αυτούς ήρθαν από το σύστημα με τις δέσμες και πόσοι από τις κατευθύνσεις
 - Βαθμολογίες του πληθυσμού στα μαθηματικά (οπότε να έχουμε μια εκτίμηση του κατά πόσον το δείγμα μας είναι τυχαίο).

Στη συνέχεια ακολουθεί κάποια επιχειρηματολογία σχετικά με τα στατιστικά συμπεράσματα που μπορούμε (ή δεν μπορούμε) να έχουμε.

Για εκείνους τους φοιτητές που εισήχθησαν με το σύστημα των πανελληνίων εξετάσεων, δεν είχαμε πρόσβαση από τις καταστάσεις του υπουργείου στους βαθμούς τους (γι' αυτό υπάρχουν οι αντίστοιχες παύλες στη στήλη του πληθυσμού του παραπάνω πίνακα).

Τα 360 παιδιά που εισήχθησαν στο Τμήμα Μαθηματικών με τις εξετάσεις, είναι πολύ μικρό πλήθος σε σχέση με εκείνο των παιδιών που εισάγονται σε όλα τα Τμήματα. Τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου δεν είναι αντιπροσωπευτικά του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος.

Το δείγμα που έχουμε πάρει ακόμη και από τους φοιτητές του πρώτου έτους είναι πολύ μικρό. Εάν θα επιθυμούσαμε να έχουμε με πιθανότητα μεγαλύτερη του 90% μια εκτίμηση του μέσου φοιτητή, ως προς το βαθμό που έγραψε στα μαθηματικά, με περιθώριο σφάλματος ένα δέκατο της μονάδας (με άριστα το είκοσι), θα έπρεπε να έχουμε επιλέξει δείγμα μεγέθους 265 φοιτητών.

Αντίθετα έχουμε με πιθανότητα μεγαλύτερη του 90% εκτιμήσει τον μέσο όρο του φοιτητή με περιθώριο σφάλματος 0.4 μονάδες με το δείγμα των 52 φοιτητών που επιλέξαμε. Συνεπώς για το Τμήμα Μαθηματικών σύμφωνα με το παραπάνω διάστημα εμπιστοσύνης που δώσαμε μπορούμε να βγάλουμε κάποια ανάλογα συμπεράσματα.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τις απαντήσεις των φοιτητών δεν είναι γενικεύσιμα. Όπως τονίστηκε και στο προηγούμενο μέρος στατιστικά έχουμε έναν πολύ μικρό πληθυσμό, και εξίσου μικρό δείγμα. Εντούτοις, αρκετά σημεία είναι ενδεικτικά του επιπέδου κατανόησης και των προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές κατά τη μετάβασή τους από τη μέση στην ανώτατη εκπαίδευση. Ιδιαίτερα από τις συνεντεύξεις προέκυψε αρκετά ενδιαφέρον υλικό.

Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων στα δύο Τμήματα, προκύπτει ότι οι φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών παρουσιάζουν μια αρκετά καλύτερη γενική εικόνα. Δίνουν σε μεγαλύτερο ποσοστό σωστές απαντήσεις. Προφανώς οι φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών έχουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Το υπόβαθρό τους είναι καλύτερο σε αντίθεση με τους φοιτητές του ΜΙΘΕ. Αρκεί να αναφερθεί ότι υπάρχουν φοιτητές στο ΜΙΘΕ που δεν έχουν διδαχθεί μαθηματικά στην τελευταία τάξη του Λυκείου (όσοι προέρχονται από την τρίτη δέσμη – σε ποσοστό 15%). Πολλοί φοιτητές του ΜΙΘΕ παρουσιάζουν αδυναμίες σε πολύ απλές ερωτήσεις, όπως για παράδειγμα ποιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί, οι ακέραιοι, οι ρητοί και οι πραγματικοί. Κατά μέσο όρο στο Τμήμα Μαθηματικών απαντούν σωστά 20% περισσότεροι από αυτούς που απαντούν σωστά στο ΜΙΘΕ. Εντούτοις υπάρχουν και 5 ερωτήσεις στις οποίες οι φοιτητές που απάντησαν σωστά στο ΜΙΘΕ είναι περισσότεροι, όπως στη σύγκριση των αριθμών -600^{86} , -600^{37} . Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν κάποιες ερωτήσεις στις οποίες τα ποσοστά σωστών απαντήσεων στα δυο Τμήματα είναι πολύ κοντά. Συγκεκριμένα οι ερωτήσεις που σχετίζονται με τα 2,999... και 3, παρουσιάζουν τα ίδια σχεδόν ποσοστά επιτυχίας, γεγονός που φανερώνει γενικότερα την αντίληψη που έχει ο άνθρωπος (προτού γνωρίσει την ιδιαιτερότητα των αριθμών αυτών) για τους αριθμούς αυτούς. Επίσης στην ερώτηση εάν ο αριθμός 0,777... είναι ρητός ή άρρητος είναι εντυπωσιακό ότι και στα δύο Τμήματα θεωρείται από τη συντριπτική πλειοψηφία άρρητος, ενώ παρόμοια ποσοστά εμφανίζονται και στον αριθμό $\frac{2}{3}$ (ως προς την ίδια ερώτηση). Στη συνέχεια, το κύριο σώμα των αποτελεσμάτων θα αναφέρεται στο Τμήμα Μαθηματικών. Οι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου χωρίστηκαν σε πέντε κατηγορίες ανάλογα με την έννοια στην οποία αναφέρονται. Συγκεκριμένα οι κατηγορίες αναφέρονται στις έννοιες αριθμός, συνάρτηση, συνέχεια, όριο, παράγωγος.

ΑΡΙΘΜΟΙ

Ένα από τα πιο χαρακτηριστικά από τα λάθη των φοιτητών στην κατηγορία αυτή είναι η διάκριση των κλασσικών υποσυνόλων των πραγματικών αριθμών. Ενώ τα σύνολα των φυσικών και των ακεραίων, στη συντριπτική τους πλειοψηφία, τα διακρίνουν σωστά, αρκετοί φοιτητές δεν μπορούν να ξεχωρίσουν τους ρητούς από τους άρρητους. Συνήθως θεωρούν ως ρητούς εκείνους των οποίων το δεκαδικό τους μέρος – στη δεκαδική τους αναπαράσταση γίνεται τελικά ίσο με μηδέν. Αυτό έχει σαν συνέπεια να θεωρούν άρρητο τον αριθμό $0,777\dots$ (σε ποσοστό 57%). Παράλληλα αυτό δεν σημαίνει ότι δεν γνωρίζουν πως τα κλάσματα ακεραίων είναι ρητοί. Αυτό φάνηκε πολύ καθαρά και από τη συνέντευξη ενός φοιτητή.

Θεωρούσε άρρητο τον $0,777\dots$ και ρητό τον $\frac{2}{3}$, και γενικότερα ήταν

συνεπής στην πεποίθηση ότι κάθε κλάσμα είναι ρητός αλλά κάθε δεκαδικός με άπειρα (όχι τελικά μηδέν) ψηφία είναι άρρητος. Στην ερώτηση πώς διέκρινε ότι ο $0,777\dots$ είναι άρρητος απαντά:

- Έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία. Αν ήταν ρητός κάπου θα τελείωνε.

Του ζητείται να κάνει τη διαίρεση 2 δια 3 όπου συνειδητοποιεί πως ο $\frac{2}{3}$

σύμφωνα με τις πεποιθήσεις του είναι ταυτόχρονα και ρητός και άρρητος. Παρόλη τη γνωστική σύγκρουση δεν θυμήθηκε την ορθή διάκριση ρητών-αρρήτων παρά μόνον όταν του τη θύμισα εγώ.

Αιτία αυτής, αλλά και άλλων παρόμοιων περιπτώσεων που θα αναπτυχθούν στη συνέχεια είναι η ύπαρξη ασυνεχειών στις διάφορες αναπαραστάσεις μιας έννοιας. Η περίπτωση του ρητού αριθμού είναι ιδιαίτερα χαρακτηριστική. Αναπαρίσταται, στο επίπεδο που βρίσκονται οι φοιτητές, ως κλάσμα ακεραίων αριθμών, ως δεκαδικός με περιοδικό δεκαδικό μέρος και ως σημείο της πραγματικής ευθείας. Προκειμένου να δώσει κάποιος σωστές απαντήσεις σε όλες τις ερωτήσεις της κατηγορίας αυτής θα έπρεπε να έχει αρμονικά συνδεδεμένες και τις τρεις αυτές αναπαραστάσεις. Η εναλλαγή από μια αναπαράσταση σε μια άλλη αποδεικνύεται ιδιαίτερα χρήσιμη και στη σωστή διάταξη των αριθμών. Στη συνέντευξη από μια φοιτήτρια, η οποία δεν μπορούσε να συγκρίνει τους αριθμούς $0,3$ και $0,34$, προέκυψε ότι ενώ γνώριζε ότι κάθε δεκαδικός αριθμός έχει τη θέση του στην ευθεία των πραγματικών αριθμών δεν είχε τη δυνατότητα να απεικονίσει τους αριθμούς αυτούς στην ευθεία. Όταν της εξηγήθηκε ο τρόπος απεικόνισης τους στην ευθεία, αφενός ήταν της ήταν φανερό ποιος είναι μεγαλύτερος από τους δυο, αφετέρου μπόρεσε να συγκρίνει και άλλους αριθμούς με επιτυχία – κάνοντας νοητά την απεικόνιση τους στην ευθεία. Η πλειονότητα των λανθασμένων απαντήσεων

στην ερώτηση που ζητάει να βρεθεί αριθμός ανάμεσα στο $\frac{1}{3}$ και στο $\frac{2}{3}$ οφείλεται στο ότι δεν μετέτρεψαν τους αριθμούς στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα. Ενδεικτικό αυτού, είναι και το γεγονός ότι μόνο το 44% των φοιτητών γνωρίζει ότι υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία των πραγματικών αριθμών με τους δεκαδικούς.

Δυσκολία συναντάται από τους φοιτητές και στη μονοτονία των εκθετικών συναρτήσεων. Ελάχιστοι φοιτητές ήταν σε θέση να συνδέσουν τη σύγκριση των αριθμών σε δυνάμεις με τις εκθετικές συναρτήσεις. Ο ισχυρισμός αυτός ενισχύθηκε επανειλημμένα στις συνεντεύξεις. Ακόμη και ένας πολύ καλός φοιτητής, που από τις απαντήσεις του φαινόταν ότι έχει ασυνέπεια στον τρόπο που συνέκρινε τέτοιους αριθμούς, όπως αποδείχθηκε αφενός μπερδεύονταν με τα πρόσημα, αφετέρου θεωρούσε ότι όσο μεγαλώνει ο εκθέτης, τόσο θα μεγαλώνει και ο αριθμός, ανεξάρτητα από τη βάση. Όταν του δόθηκαν οι γραφικές παραστάσεις των εκθετικών συναρτήσεων για διάφορες βάσεις, αποκάλυψε ενθουσιασμένος ότι δεν είχε σκεφτεί ότι αυτά τα σχήματα που γνώριζε από το σχολείο θα μπορούσαν τόσο εύκολα να δώσουν απάντηση στα ερωτήματα αυτά.

Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, στις συζητήσεις επάνω στη διάταξη των αριθμών, ακούγεται αρκετές φορές από τους φοιτητές η έκφραση «ο επόμενος αριθμός». Αυτό συναντάται κυρίως στις εξής περιπτώσεις: ο 3 είναι ο επόμενος του 2,999..., ο $\frac{1}{3}$ είναι ο επόμενος του $\frac{1}{3}$

ή ο 1,9 είναι ο επόμενος του 1,888... . Τονίζεται ότι, οι περισσότεροι φοιτητές υποστηρίζουν ότι ανάμεσα σε δύο πραγματικούς αριθμούς, υπάρχει και άλλος πραγματικός αριθμός. Αυτό το λάθος αποτελεί ένα γνωστό επιστημολογικό εμπόδιο. Είναι το πρόβλημα της μετάβασης από το σύνολο των ακεραίων αριθμών στα σύνολα των ρητών και των πραγματικών. Είναι μια γνώση που ενώ ισχύει σε κάποια περιοχή της γνώσης και λειτουργεί αποτελεσματικά, λύνοντας σημαντικά προβλήματα (πχ μαθηματική επαγωγή), εντούτοις, σε άλλο πλαίσιο δε λειτουργεί εξίσου, ο φοιτητής γνωρίζει ήδη τους λόγους για τους οποίους δεν ισχύει, αλλά η προγενέστερη αποτελεσματικότητα της προσέγγισης δεν απεγκλωβίζει τη νέα γνώση.

Η ερωτήσις, τέλος, σχετικά με το 2,999... και το 3, είναι ένα άλλο ενδιαφέρον σημείο. Ασφαλώς οι φοιτητές με τις γνώσεις που ήδη έχουν δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουν ότι πρόκειται για δύο τρόπους γραφής του ίδιου αριθμού. Εξαίρεση αποτελεί ένα κομμάτι της ύλης της Β' Λυκείου που αναφέρεται στο άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου και σαν εφαρμογή του θα ήταν δυνατή η απόδειξη του παραπάνω. Εντούτοις, το σημείο αυτό στο σχολείο περνά απαρατήρητο. Το ενδιαφέρον παρουσιάζεται σε συνδυασμό με την ερώτηση E9. Οι μισοί σχεδόν φοιτητές

γνωρίζουν ότι ανάμεσα σε δύο πραγματικούς αριθμούς υπάρχει πάντοτε κάποιος πραγματικός αριθμός ενώ, απαντώντας ανάλογα στις αντίστοιχες ερωτήσεις, ισχυρίζονται ότι οι 2,999... και 3 είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και μεταξύ των δυο, δεν υπάρχει κανένας πραγματικός αριθμός. Αυτό είναι μια αντίφαση. Όλα τα παιδιά που κλήθηκαν στη συνέντευξη είχαν αυτό το λάθος. Βέβαια την εποχή που έγιναν οι συνεντεύξεις, οι φοιτητές είχαν ήδη διδαχθεί, στο μάθημα του απειροστικού λογισμού, τη δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών και είχαν δει την απόδειξη της ισότητας των δυο αριθμών. Εντούτοις ακόμη και στο επίπεδο αυτό, η γνωστική σύγκρουση είναι μεγάλη. Χαρακτηριστικά κάποιος από τους φοιτητές στη συνέντευξη αναφέρει: «δεν μπορώ να το δεχτώ ότι είναι ίσοι οι δύο αριθμοί. Ναι, το αποδείξαμε. Μήπως το ίσον όμως είναι συμβιβασμός; Καταλαβαίνω ότι τείνει στο 3 αλλά δεν είναι ίσο με 3». Ασφαλώς αυτή η συμπεριφορά είναι δικαιολογημένη εφόσον ακόμη δεν έχει γίνει κατανοητή η ουσιαστική δομή του δεκαδικού αναπτύγματος των πραγματικών αριθμών.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Η έννοια της συνάρτησης αποτελεί κεντρικής σημασίας έννοια του απειροστικού λογισμού αλλά και γενικότερα των Μαθηματικών. Στα μαθηματικά κατεύθυνσης της τρίτης λυκείου επίσης, το βασικό πλαίσιο της ύλης κινείται στη μελέτη συναρτήσεων. Στις ερωτήσεις που δόθηκαν στους φοιτητές, γίνεται προσπάθεια να ελεγχθούν τα εξής: Ο τυπικός ορισμός της συνάρτησης και κατά πόσον μπορούν να εφαρμόσουν τον έλεγχο της ισχύος του ή μη σε διάφορα πλαίσια και η έννοιες του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης. Το επίκεντρο των ερωτήσεων είναι εστιασμένο στον εντοπισμό του βαθμού αντικειμενοποίησης της έννοιας της συνάρτησης που έχει έχουν κατακτήσει οι φοιτητές και στον εντοπισμό δυσκολιών τους κατά τη μετάβαση από μια αναπαράσταση της συνάρτησης σε μια άλλη. Με άλλα λόγια γίνεται μια διερεύνηση της ιδεοεικόνας που έχουν δημιουργήσει οι φοιτητές για τη συνάρτηση.

Η έννοια της συνάρτησης από ένα σύνολο σε ένα σύνολο ορίζεται, στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ως μια διαδικασία στην οποία κάθε στοιχείο του πρώτου συνόλου αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο στοιχείο του δεύτερου. Αυτό τον ορισμό οι φοιτητές δείχνουν να τον γνωρίζουν. Αυτό ενισχύεται και από τις συνεντεύξεις όπου όλοι οι συμμετέχοντες τον γνώριζαν. Αυτό που δεν γνώριζαν, κάποιος από αυτούς, ήταν με ποιον τρόπο αυτός ο ορισμός μπορεί να ελεγχθεί ως προς την ισχύ του σε διάφορες περιπτώσεις. Η ερώτηση με τους ανθρώπους που αφήνουν τα χρήματά τους στο γυμναστήριο, είναι ενδεικτική της στενής εικόνας που έχουν οι φοιτητές για την συνάρτηση. Κάποιοι δοκιμάζουν να φτιάξουν κατάλληλα σύνολα αριθμών, εφόσον δε μπορούν να διανοηθούν την ύπαρξη συναρτήσεων μη

πραγματικής μεταβλητής. Άλλοι, έχοντας κατά νου συναρτήσεις που έχουν τύπο και σύμβολα για τις μεταβλητές που εμπλέκονται στη διαδικασία, πιστεύουν ότι για να απαντήσουν σωστά στην ερώτηση, πρέπει να αποδώσουν ένα σύμβολο στο πεδίο ορισμού και στο σύνολο τιμών της συνάρτησης, καθώς και έναν τύπο που να δίνει τον κανόνα αντιστοίχισης. Αρκετοί απαντούν ότι τέτοια συνάρτηση δεν υπάρχει διότι δεν έχει αλγεβρικό τύπο. Κάποιοι τέλος συγχέουν το μονότιμο της συνάρτησης με την 1-1 ιδιότητα.

Παρόλο που στις συνεντεύξεις δεν υπήρχαν φοιτητές με το πρόβλημα αυτό, φαίνεται ότι ακόμη και ο συμβολισμός των μεταβλητών μιας συνάρτησης παίζει σημαντικό ρόλο στην αποδοχή της ως συνάρτησης ή όχι. Η παράσταση $y = x^2$ αναγνωρίζεται σχεδόν από όλους τους φοιτητές ως συνάρτηση. Αντίθετα δεν θεωρούν συνάρτηση την παράσταση $s = 3t$, σε ποσοστό 24%. Αρκετοί από αυτούς απαιτούν η ανεξάρτητη μεταβλητή να παίρνει μόνο θετικές τιμές (έχοντας συνηθίσει το t να συμβολίζει χρόνο). Παρόμοια κατάσταση εμφανίζεται και στην παράσταση $f(y) = e^y$ (ποσοστό όχι σωστών απαντήσεων 34%). Στην περίπτωση αυτή, όπως και στην προηγούμενη, δεν υπάρχει το x ως μεταβλητή και δημιουργείται σύγχυση. Αρκετοί, έχοντας το πρότυπο $y = f(x)$, θεωρούν στην παραπάνω παράσταση το y εξαρτημένη μεταβλητή, ή το απαιτούν θετικό, έχοντας κατά νου τη λογαριθμική συνάρτηση. Παρόμοια περίπτωση αποτελούν οι σταθερές συναρτήσεις $f(x) = 3$, που δεν απαντάται σωστά από το 6% των φοιτητών, και η $\alpha = \sqrt{2}$ με ποσοστό όχι σωστών απαντήσεων 19%. Σε όλα τα ερωτήματα της E18 (εκτός από το E18.4 το οποίο αναφέρεται στην έννοια του ολοκληρώματος) απαντούν σωστά 12 φοιτητές / φοιτήτριες (22%)

Στον έλεγχο εάν ένα γράφημα μπορεί να αποτελεί γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης (E19a) μόνο το 24% των φοιτητών απαντούν σωστά. Το 33% των φοιτητών για παράδειγμα θεωρεί συνάρτηση μια ευθεία παράλληλη στον άξονα yy' (ίσως επειδή έχει τύπο). Στα διαγράμματα Venn (E23) οι μισοί σχεδόν φοιτητές κάνουν κάποιο λάθος στον έλεγχο του ορισμού, ενώ συνολικά σε όλες τις ερωτήσεις που απαιτούσαν έλεγχο του ορισμού της συνάρτησης απάντησαν σωστά μόνο δυο φοιτητές. Αυτό είναι και το κρίσιμο σημείο. Οι φοιτητές σε ειδικές περιπτώσεις, που έχουν συναντήσει στο παρελθόν ενδεχομένως, μπορούν να ελέγξουν την έννοια της συνάρτησης. Στις διάφορες όμως αναπαραστάσεις της έννοιας φαίνεται ότι υπάρχει δυσκολία, δηλαδή δείχνουν να στερούνται μια ολοκληρωμένη εννοιολογική της έννοιας της συνάρτησης.

Στον έλεγχο της ισότητας συναρτήσεων στην E17a σε ποσοστό 83% απαντούν σωστά διακρίνουν την ανάγκη ισότητας των πεδίων ορισμού. Στην εύρεση πεδίου ορισμού και συνόλου τιμών από τη γραφική αναπαράσταση υπάρχει ιδιαίτερη δυσκολία καθώς μονάχα το 15% των φοιτητών δίνει στο σύνολο της E20 σωστές απαντήσεις.

	Σωστό	Λάθος	Δε γνωρίζω
E16	19 (35%)	23 (43%)	12 (22%)
E18	12 (22%)	42 (78%)	-
E19α	24 (44%)	30 (56%)	-
E23	28 (52%)	26 (48%)	-

Στον παραπάνω πίνακα περιλαμβάνονται συνοπτικά οι απαντήσεις των φοιτητών στις ερωτήσεις που αφορούν στον έλεγχο του ορισμού της συνάρτησης, «λεκτικά» στην E16, αλγεβρικά στην E18, γραφικά στην E19α και στα διαγράμματα Venn στην E23 τα οποία αποτελούν συμβολική αναπαράσταση της συνάρτησης.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Στην έννοια της συνέχειας το πιο χαρακτηριστικό λάθος είναι η εξέταση της σε σημεία εκτός πεδίου ορισμού. Κατά συνέπεια, συναρτήσεις όπως η $\frac{1}{x}$, η οποία εμφανιζόταν σε κάποιο γράφημα, δίχως να δίνεται ο τύπος της, θεωρήθηκε από αρκετούς φοιτητές ότι παρουσιάζει ασυνέχεια στο σημείο μηδέν. Αυτό ενισχύεται και από την κλασική λανθασμένη αντίληψη που θέλει τις συνεχείς συναρτήσεις να έχουν γράφημα που μπορεί να σχεδιαστεί «μονοκονδυλιά». Η έκφραση «συνεχείς είναι οι συναρτήσεις που δεν χρειάζεται να σηκώσεις το μολύβι για να τις ζωγραφίσεις», είναι πολύ χρήσιμη σε μια εισαγωγική επαφή με την έννοια της συνέχειας – και σαφώς είναι αληθής σε συναρτήσεις ορισμένες σε διάστημα – εντούτοις δημιουργεί σοβαρές παρανοήσεις για την έννοια της συνέχειας η οποία είναι **τοπική**. Σε όλες τις ερωτήσεις τις σχετικές με την έννοια της συνέχειας απάντησαν σωστά μονάχα τέσσερις φοιτητές.

Στις συνεντεύξεις, όλοι οι φοιτητές είχαν κάποια λάθη στη συνέχεια. Όλοι ανεξαιρέτως είχαν ελέγξει τη συνέχεια σε κάποιο σημείο εκτός πεδίου ορισμού. Στην ερώτηση ποιες συναρτήσεις λέγονται συνεχείς, απαντούσαν ότι είναι «εκείνες στις οποίες ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ». Ορμώμενος από αυτή

την απάντησή τους ζητούσα σε κάποιο σημείο εκτός πεδίου ορισμού, από αυτά που είχαν ελέγξει τη συνέχεια να μου εντοπίσουν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και

το $f(x_0)$. Στο σημείο αυτό ερχόταν η γνωστική σύγκρουση και αυτόματα ανακαλούσαν τον προηγούμενο ορισμό δίνοντας τον «βελτιωμένο» ορισμό «συνεχής είναι μια συνάρτηση που σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ». Βεβαίως στο επίπεδο αυτό δε γίνεται συζήτηση για τυχόν μεμονωμένα σημεία.

Μια συνάρτηση που πολύ δύσκολα δέχεται ο φοιτητής ότι είναι συνεχής είναι η E19.7 αυτήν αναγνώρισε ως συνεχή μονάχα το 7% των φοιτητών. Αυτή η συνάρτηση δεν ορίζεται σε ένα σημείο. Στο σημείο αυτό τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά. Αντίθετα πολύ μικρότερα ποσοστά λαθών συναντώνται πχ στην E19.1 (σωστά 91%). Η συνάρτηση αυτή είναι ορισμένη σε ημιάνοικτο διάστημα. Σε σχετική ερώτηση στη συνέντευξη, η απάντηση ήταν ότι είναι συνεχής παρόλο που δεν ορίζεται ούτε αυτή στο άκρο επειδή στα άκρα του πεδίου ορισμού δεν μας ενδιαφέρει. Άλλη μια συνάρτηση που έχει διαφορετικά πλευρικά όρια είναι E19.9 η οποία όμως ορίζεται στο σημείο αυτό. Στη συνέντευξη, η απάντηση ήταν πως αυτή είναι συνεχής διότι ορίζεται στο σημείο που γίνεται το πήδημα σε αντίθεση με την E19.7 που δεν ορίζεται στο σημείο του άλματος, και άρα δεν είναι συνεχής.

ΟΡΙΟ

Στο σχολείο το επίκεντρο της του ενδιαφέροντος για την έννοια του ορίου βρίσκεται στις τεχνικές υπολογισμού ορίων. Μια καλή ένδειξη αυτού αποτελεί η ερώτηση E17β. Σωστά απάντησε μονάχα μια φοιτήτρια. Η σωστή απάντηση στην ερώτηση αυτή είναι ότι η τιμή του ορίου σε ένα σημείο είναι ανεξάρτητη από την τιμή της στο συγκεκριμένο σημείο ή από το εάν ανήκει στο πεδίο ορισμού. Η ερώτηση ενδεχομένως δεν οδηγούσε το φοιτητή φυσιολογικά στη σωστή απάντηση, παρόλα αυτά από τις λανθασμένες απαντήσεις που δόθηκαν, στα ερωτηματολόγια αλλά και στις συνεντεύξεις, θεωρούνται ιδιότητες του ορίου, μονάχα εκείνες που προσθέτουν εργαλεία στον εύκολο υπολογισμό ορίων (πχ το άθροισμα συγκλινουσών συγκλίνει στο άθροισμα των ορίων). Ακόμη και όταν τους αποκάλυπτα τη σωστή απάντηση στην εν λόγω ερώτηση, η απορία τους ήταν «μα αυτό είναι ιδιότητα των ορίων;»

Ενίσχυση στην παραπάνω διαπίστωση αποτελεί και το αποτέλεσμα στην ερώτηση E21. Στην ερώτηση αυτή ζητείται από τους φοιτητές να βρουν όρια συναρτήσεων από τις γραφικές τους παραστάσεις. Λίγο περισσότεροι από τους μισούς είναι ικανοί να αναγνωρίσουν το όριο από τη γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης. Αυτό το ποσοστό είναι πολύ μικρό, διότι όσο καλές τεχνικές και να διαθέτει κανείς για τον υπολογισμό ορίων, από τη γραφική αναπαράσταση φαίνεται η κατανόηση της έννοιας ποιοτικά. Στις υπόλοιπες ερωτήσεις που σχετίζονται με το όριο υπάρχει παρόμοια κατάσταση. Σε όλες τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου που

σχετίζονται με την έννοια του ορίου, (εξαιρουμένης της E.17β), δηλαδή στις E.21, E22.(i), (ii), (iii), (iv), (vii), (viii), E24.(vi), (vii), (viii), E25.6, έχουν απαντήσει σωστά 6 φοιτητές / φοιτήτριες (11%)

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Στην έννοια της παραγώγου περίπου οι μισοί φοιτητές δείχνουν να μπορούν να αναγνωρίσουν, από το γράφημα, πότε μια συνάρτηση δεν έχει παράγωγο. Στις συνεντεύξεις ακούστηκε πολλές φορές «εδώ κάνει μύτη, άρα δεν έχει παράγωγο». Επίσης σχεδόν ίδιο είναι το ποσοστό εκείνων που μπορούν να ερμηνεύσουν γεωμετρικά την παράγωγο ως κλίση της εφαπτομένης ευθείας στο εν λόγω σημείο. Τέλος οι μισοί αναγνωρίζουν ότι στα σημεία ασυνέχειας δεν είναι παραγωγίσιμη. Ελάχιστοι όμως έχουν και τις τρεις αυτές ιδιότητες της παραγώγου ταυτόχρονα στην εννοιοεικόνα που έχουν στο μυαλό τους. Ενδεικτικό είναι ότι σε όλες τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου που σχετίζονται με την έννοια της παραγώγου, δηλαδή E.22 (v), (vi), (x), (xi), (xii) , E.24 (iv), E25.2, E25.8, έχουν απαντήσει σωστά μονάχα 2 φοιτητές / φοιτήτριες (4%). Και οι δύο παρουσιάζουν ιδιαίτερα καλή εικόνα στο γραπτό τους. Τη σχέση που έχει η παράγωγος μιας συνάρτησης με τα ακρότατα της συνάρτησης, μπορούσαν να εντοπίσουν φοιτητές σε ποσοστό 13%. Ενώ για τα σημεία καμπής (που ήταν εκτός ύλης τη χρονιά που έδωσαν εξετάσεις) μόνο το 4% των φοιτητών απάντησαν σωστά, ενώ το 52% των φοιτητών δοκίμασε να απαντήσει και έκανε λάθος.

Για την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος, όπως προαναφέρθηκε, δεν είχε διδαχθεί στο σχολείο τη χρονιά εκείνη με αποτέλεσμα να απαντήσουν κυρίως τα παιδιά που προέρχονταν από το σύστημα των δεσμών. Σχεδόν όλα τα παιδιά από τις δέσμες γνώριζαν την αντιστοιχία της τιμής του ορισμένου ολοκληρώματος με το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη της συνάρτησης.

ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Κάθε φοιτητής που συμμετείχε στην έρευνα είχε εξεταστεί στα μαθηματικά, τέσσερις μήνες πριν σε πανελλαδικό επίπεδο. Οι έννοιες των Μαθηματικών που εμπλέκονται στο ερωτηματολόγιο περιλαμβάνονται στην ύλη που είχαν εξεταστεί οι φοιτητές. Οι ερωτήσεις, επίσης, ήταν επιλεγμένες με τέτοιο τρόπο ώστε να μην απαιτούν από το φοιτητή να θυμάται κάποιον ειδικό τύπο ή κάποια εξειδικευμένη ιδιότητα των εννοιών, αλλά να ελέγχουν κατά πόσον έχει δημιουργηθεί μια εννοιοεικόνα ικανή να δίνει απαντήσεις σε ελέγχους που αφορούν στις θεμελιώδεις ιδιότητες κάθε έννοιας. Αρκετοί από τους φοιτητές έχουν σχηματίσει λανθασμένες εννοιοεικόνες, που όχι

μόνο δεν οδηγούν στην ορθή αντιμετώπιση προβλημάτων, αλλά κάποιες φορές και σε λογικές αντιφάσεις. Ιδιαίτερη σημασία στη δημιουργία εννοιολογικών θεωρούμε ότι έχουν οι γραφικές αναπαραστάσεις των εννοιών. Δίχως να υποστηρίζουμε ότι οι αλγεβρικοί χειρισμοί των εννοιών δεν αποτελούν σημαντικό κομμάτι των Μαθηματικών, είναι γεγονός ότι σε πολλές περιπτώσεις, οι γραφικές αναπαραστάσεις αποτελούν το μοναδικό ικανό μέσο για την έμπνευση των Μαθηματικών ιδεών και τη δημιουργικότητα στα μαθηματικά. Από τις απαντήσεις των φοιτητών στα ερωτηματολόγια, συμπεραίνουμε ότι αρκετοί φοιτητές έχουν πρόβλημα στην άντληση των κατάλληλων πληροφοριών από τις γραφικές αναπαραστάσεις. Δηλαδή, δεν ξέρουν να «διαβάζουν» τα σχήματα, κάτι το οποίο εκτιμούμε ότι πρέπει να είναι βασικός στόχος της διδασκαλίας – ιδιαίτερα σε επίπεδο εισαγωγικό – του Απειροστικού Λογισμού, διότι οι γραφικές αναπαραστάσεις δίνουν πληροφορίες για τις ουσιαστικές ιδιότητες των εννοιών και αναπτύσσουν τη διαίσθηση.

Ένα γενικό, επίσης συμπέρασμα που προκύπτει από όλες τις ερωτήσεις που ελέγχουν την κατανόηση του ορισμού μιας έννοιας, είναι ότι συχνά οι φοιτητές ενώ γνωρίζουν τον τυπικό ορισμό της έννοιας, δεν έχουν τη δυνατότητα να τον εφαρμόσουν σε συγκεκριμένα παραδείγματα. Ασφαλώς, αυτό επιτυγχάνεται με πολύ αργό ρυθμό και μέσα από πολλά παραδείγματα στα οποία αναδεικνύονται οι περιορισμοί και η έκταση που λαμβάνει μια έννοια σαν συνέπεια του ορισμού της. Οι ορισμοί των εννοιών της συνάρτησης, της συνέχειας, του ορίου και της παραγώγου, είναι ιδιαίτερα πολύπλοκοι σε σχέση με άλλους που συναντώνται στα σχολικά μαθηματικά. Εκτιμούμε ότι αυτό αποτελεί και την ουσιαστική δυσκολία του μαθητή στην πρώτη του ίσως επαφή με έννοιες των ανώτερων Μαθηματικών.

Θα ήταν ιδιαίτερα σημαντικό, αυτή η εργασία να μην είναι απλώς ένας εντοπισμός δυσκολιών μαθητών, αλλά να περιλάμβανε σε κάποιο τουλάχιστον ποσοστό και κάποιου είδους απάντησης στο ερώτημα, πώς αυτές οι δυσκολίες αντιμετωπίζονται. Προσπάθεια απάντησης αποτελεί το κεφάλαιο στο οποίο περιγράφεται το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο κινείται η εργασία, καθώς και παρόν κεφάλαιο των συμπερασμάτων. Ασφαλώς δεν υπάρχει κάποια συνταγή για τη διδασκαλία των στοιχειωδών εννοιών του Απειροστικού Λογισμού, αλλά μέσα από τα προαναφερθέντα κεφάλαια, γίνεται σαφής η ανάγκη για προσανατολισμό – ή μετατόπιση όπου χρειάζεται – των διδακτικών στόχων, στην ανάπτυξη ικανοτήτων χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων και αρμονικής εναλλαγής μεταξύ τους.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. 'Advanced Mathematical Thinking'
David Tall
Kluwer Academic Publishers, 1991
2. 'Concept Image and Concept Definition'
David Tall
Senior Secondary Mathematics Education
(ed. Jan de Lange, Michiel Doorman), (1988)
OW&OC Utrecht, 37,41
3. 'Operational origins of Mathematical Objects and the Quandary
of Reification - The Case of Function'
Anna Sfard
Guershon Harel and Ed Dubinsky, "The Concept of Function"
MAA Notes, 25, 1992, (p.59-84)
4. 'Intuitions on infinity'
Tall & Vinner
Mathematics in school 10, 30-33 (1981)
5. 'Εισαγωγή στη στατιστική'
Χ. Δαμιανού, Μ. Κούτρας
Εκδόσεις Αίθρα, 1991
6. 'Calculus' (Second Edition)
Deborah Hughes-Hallett, William G. McCallum, Andrew M.
Gleason, Brad G. Osgood, Daniel E. Flath, Andrew Pasquale,
Sheldon P. Gordon, Jeff Texasosky-Feldman, David O. Lomen, Joe
B. Tharsh, David Lovelock, Karen R. Thrash.
Thomas W. Tucker - Otto K. Bretscher
John Wiley & Sons, Inc.