ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΑΛΛΑΓΗ ΣΤΗΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ: ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΥΚΛΟΥ ΣΤΗΝ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Θεοδόσιος Ζαχαριάδης*, tzaharia@math.uoa.gr
Ειρήνη Μπιζά, empiza@sch.gr
Αλκαίος Σουγιούλ, alkeos@math.uoa.gr
Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών

Περίληψη

Στο άρθρο αυτό, ισχυριζόμαστε ότι η θεωρία της *εννοιολογικής αλλαγής* μπορεί να ερμηνεύσει ορισμένες από τις παρανοήσεις που εμφανίζουν οι μαθητές/μαθήτριες όταν μεταβαίνουν από την έννοια της εφαπτομένης του κύκλου και των κωνικών τομών στην εφαπτομένη μιας οποιασδήποτε καμπύλης. Από πιλοτική έρευνα προκύπτει ότι απόφοιτοι του Λυκείου που έχουν παρακολουθήσει το μάθημα «Μαθηματικά Κατεύθυνσης», στην προσπάθειά τους να αντιμετωπίσουν προβλήματα που αφορούν στην εφαπτομένη καμπύλης, είτε παραμένουν στην *εικόνα* που έχουν από την έννοια της εφαπτομένης κύκλου ή δημιουργούν λανθασμένα *συνθετικά μοντέλα*, καθώς χρησιμοποιούν ιδιότητες της εφαπτομένης κύκλου που δεν ισχύουν γενικά.

Θεωρητικό υπόβαθρο – Ο στόχος της μελέτης

Η θεωρία της *εννοιολογικής αλλαγής* μελετάει τη διαδικασία απόκτησης της γνώσης και ειδικότερα όταν η προϋπάρχουσα γνώση δεν είναι συμβατή με τη νέα. Στην περίπτωση αυτή, συχνά παρατηρούνται λάθη που οφείλονται σε συστηματικές παρανοήσεις (Vosniadou, 1994). Αρκετές μελέτες έχουν ασχοληθεί με την εννοιολογική αλλαγή στην περίπτωση μαθηματικών εννοιών (e.g. Merenluoto & Lehtinen, 2002; Stafilidou & Vosniadou, in press; Vamvakoussi & Vosniadou, 2002). Στη μελέτη αυτή, παρουσιάζονται αποτελέσματα από μια πιλοτική έρευνα που αφορά στην κατανόηση εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης από τη σκοπιά της εννοιολογικής αλλαγής. Συγκεκριμένα, η μελέτη αυτή ασχολείται με την έννοια της εφαπτομένης καμπύλης, η οποία συνδέεται με την έννοια της παραγώγου.

Η εφαπτομένη ευθεία παρουσιάζεται σε τρία στάδια στο αναλυτικό πρόγραμμα της Μέσης Εκπαίδευσης. Στο πρώτο στάδιο, στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, διδάσκεται η εφαπτομένη του κύκλου ως η ευθεία που έχει ένα ακριβώς κοινό σημείο με τον κύκλο. Μια, διαισθητικά προφανής, ιδιότητα αυτής της ευθείας είναι ότι χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα ένα εκ των οποίων περιέχει ολόκληρο τον κύκλο. Αργότερα, στην Αναλυτική Γεωμετρία όπου οι μαθητές/μαθήτριες διδάσκονται τις κωνικές τομές, ο ορισμός της εφαπτομένης είναι διαφορετικός και πιο πολύπλοκος. Η ιδιότητα του «ακριβώς ενός κοινού σημείου» παραμένει αληθής και στην περίπτωση των κωνικών τομών, όμως δεν είναι αρκετή για να ορίσει την εφαπτομένη. Όσον αφορά στην ιδιότητα της «διατήρησης στο ίδιο ημιεπίπεδο», αν και δεν αληθεύει στην περίπτωση της υπερβολής, ισχύει σε κάθε κλάδο της χωριστά. Συνεπώς, για τους/τις μαθητές/μαθήτριες δεν δημιουργείται η ανάγκη αλλαγής των προηγούμενων εικόνων τους. Τέλος, στην εισαγωγή των μαθητών/μαθητριών στην Μαθηματική Ανάλυση, οι μαθητές/μαθήτριες έρχονται σε επαφή με την εφαπτομένη σε σημείο καμπύλης. Στην περίπτωση αυτή καμιά από τις παραπάνω ιδιότητες δεν ισχύει γενικά. Υπάρχουν καμπύλες που έχουν περισσότερα από ένα κοινά σημεία με την εφαπτομένη, καθώς και καμπύλες που βρίσκονται και στα δυο ημιεπίπεδα που ορίζει η εφαπτομένη τους σε ένα σημείο (σχήμα Β1). Στο στάδιο αυτό, η εφαπτομένη καμπύλης ορίζεται μέσω της έννοιας της παραγώγου. Ωστόσο, οι μαθητές/μαθήτριες συχνά

* Η έρευνα που παρουσιάζεται σ' αυτό το άρθρο χρηματοδοτήθηκε από το Πανεπιστήμιο Αθηνών (ΕΛΚΕ).

σχηματίζουν *εικόνες* της έννοιας (concept images) της εφαπτομένης καμπύλης παρόμοιες με αυτές που είχαν για τον κύκλο (Vinner, 1991).

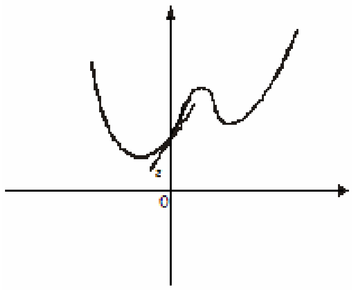
Με όρους της θεωρίας της εννοιολογικής αλλαγής που προτείνει η Βοσνιάδου (1994), ισχυριζόμαστε ότι οι εικόνες που συνδέονται με την έννοια της εφαπτομένης κύκλου είναι *προϋποθέσεις*, που λειτουργούν ως εμπόδιο στη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της εφαπτομένης καμπύλης. Συχνά οι μαθητές/μαθήτριες δημιουργούν *συνθετικά μοντέλα*, στην προσπάθειά τους να προσαρμόσουν τη νέα γνώση, που αφορά στην εφαπτομένη καμπύλης, στις προηγούμενες γνώσεις τους για τον κύκλο και τις κωνικές τομές.

Μεθοδολογία

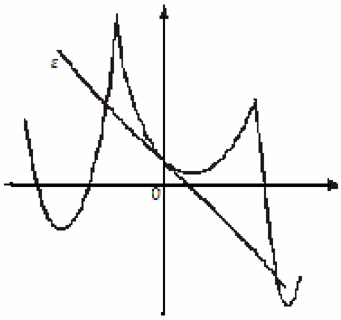
Στην παρούσα πιλοτική έρευνα συμμετείχαν 19 πρωτοετείς φοιτητές και φοιτήτριες του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών, διαφορετικών επιδόσεων. Οι φοιτητές/φοιτήτριες απάντησαν σε ένα ερωτηματολόγιο και στη συνέχεια πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις με κάθε έναν από αυτούς/αυτές στις οποίες συζητήθηκαν οι απαντήσεις τους. Κατά τη διάρκεια του προηγούμενου έτους, όλοι/όλες οι φοιτητές/φοιτήτριες είχαν διδαχθεί στο Λύκειο ένα εισαγωγικό μάθημα Μαθηματικής Ανάλυσης, ενώ όταν πραγματοποιήθηκε η έρευνα δεν είχαν παρακολουθήσει το αντίστοιχο πανεπιστημιακό μάθημα.

Αποτελέσματα

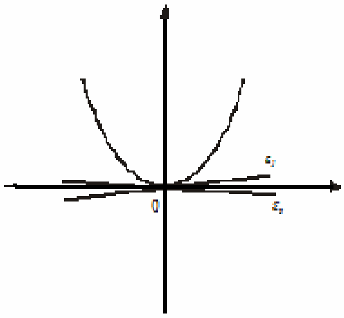
Στο κομμάτι του ερωτηματολογίου που αφορούσε στην εφαπτομένη καμπύλης, οι φοιτητές/φοιτήτριες κλήθηκαν να απαντήσουν ποιες από τις ευθείες στο κάθε ένα από τα παρακάτω σχήματα είναι εφαπτόμενες της καμπύλης στο σημείο με τετμημένη μηδέν.



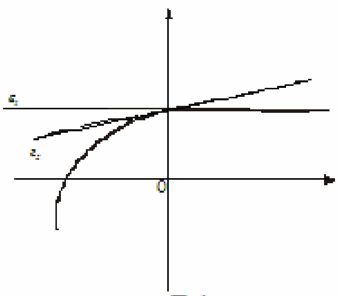
B1



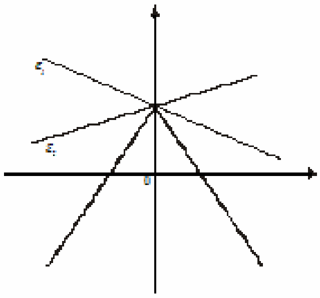
B2



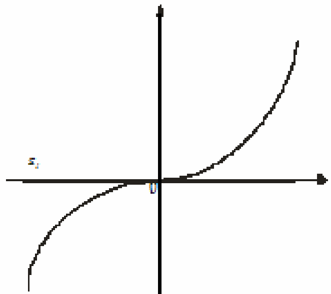
B3



B4



B5



B6

Με βάση τις απαντήσεις στο ερωτηματολόγιο και στις συνεντεύξεις, οι φοιτητές/φοιτήτριες που συμμετείχαν στην έρευνα χωρίζονται σε τρεις ομάδες, ανάλογα με το βαθμό που οι ιδιότητες του «ακριβώς ενός κοινού σημείου» και της «διατήρησης στο ίδιο ημιεπίπεδο» επηρεάζουν την *εικόνα* τους για την έννοια της εφαπτομένης. Στην πρώτη ομάδα (5 άτομα) οι φοιτητές/φοιτήτριες θεωρούν ότι αυτές οι ιδιότητες χαρακτηρίζουν την εφαπτομένη. Απορρίπτουν ως λανθασμένες ορισμένες ευθείες που είναι εφαπτομένες, όπως αυτές στα σχήματα Β2 και Β6, ενώ δέχονται ως σωστές άλλες που δεν είναι, όπως εκείνες στα σχήματα Β3 και Β5. Οι φοιτητές/φοιτήτριες της δεύτερης ομάδας (7 άτομα) έχουν δημιουργήσει μια πιο σύνθετη *εικόνα* για την έννοια της εφαπτομένης, εξετάζοντας τοπικά την ισχύ ή μη των δυο παραπάνω ιδιοτήτων. Κατ' αυτούς/αυτές μια ευθεία είναι εφαπτομένη καμπύλης σε ένα σημείο, εάν υπάρχει μια περιοχή γύρω από αυτό το σημείο, στην οποία η σχέση καμπύλης – ευθείας «μοιάζει» με την περίπτωση του κύκλου. Για τα άτομα αυτής της ομάδας η ε είναι εφαπτομένη της καμπύλης στο Β2, ενώ η $ε_1$ στο Β4 και Β6 δεν είναι. Στην περίπτωση αυτή, οι φοιτητές/φοιτήτριες, στην προσπάθειά τους να απαντήσουν στα ερωτήματα, κατασκεύασαν ένα λανθασμένο *συνθετικό μοντέλο* της εφαπτομένης, προσαρμόζοντας τις ιδιότητες της περίπτωσης του κύκλου στην περίπτωση της καμπύλης. Τέλος, στην τρίτη ομάδα ανήκουν επτά φοιτητές/φοιτήτριες οι οποίοι/οποίες αναγνωρίζουν σωστά την εφαπτομένη καμπύλης στα δοθέντα σχήματα.

Συμπεράσματα

Παρόλο που η παραπάνω μελέτη είναι πιλοτική, πιστεύουμε ότι προσφέρει σοβαρές ενδείξεις ότι η μετάβαση από την εφαπτομένη κύκλου και κωνικών τομών στην εφαπτομένη καμπύλης εντάσσεται στις περιπτώσεις που ερμηνεύονται με την θεωρία της εννοιολογικής αλλαγής. Οι ιδιότητες του «ακριβώς ενός κοινού σημείου» και της «διατήρησης στο ίδιο ημιεπίπεδο», φαίνεται να αποτελούν *προϋποθέσεις* για τις *εικόνες* που έχουν σχηματίσει οι φοιτητές/φοιτήτριες για την έννοια της εφαπτομένης καμπύλης. Αυτές οι ιδιότητες, που προέρχονται από τις υπάρχουσες γνώσεις των φοιτητών/φοιτητριών για τον κύκλο, αποτελούν εμπόδιο στη διαδικασία μετάβασης σε μια γενικευμένη μορφή της έννοιας της εφαπτομένης.

Αναφορές

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In Limon, M. & Mason, L. (Eds.) *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice*, (pp.233-258). Dodrecht: Kluwer Academic Publishers.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (In press). The development of Students' Understanding of the Numerical Value of Fractions In Special Issue on Conceptual Change. Learning and Instruction

Tall, D. (1989). Concept Images, Computers, and Curriculum Change. *For the Learning of Mathematics*, **9**,3 37–42.

Tall, D. (2003). Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. In L.M. Carvalho and L.C. Guimarães *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*, vol. 1, pp. 1-28, Rio de Janeiro, Brasil.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2002). Conceptual change in Mathematics: From the set of natural to the set of rational numbers. *Proceedings of the Third European Symposium on Conceptual Change, Turku, Finland.*

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics. *Advanced Mathematical Thinking*, 65-81.

Vosniadou, S. (1994). Capturing and modelling the process of conceptual change. In S. Vosniadou (Guest Editor) Special Issue on Conceptual Change. *Learning and Instruction, 4,* 45-69.